రాష్ట్ర విద్యా పరిశోధన శిక్షణా సంస్థ,
తెలంగాణ రాష్ట్రం, హైదరాబాదు

తెలంగాణ రాష్ట్ర ప్రభుత్వం వారిచే ఉచిత పంపిణీ

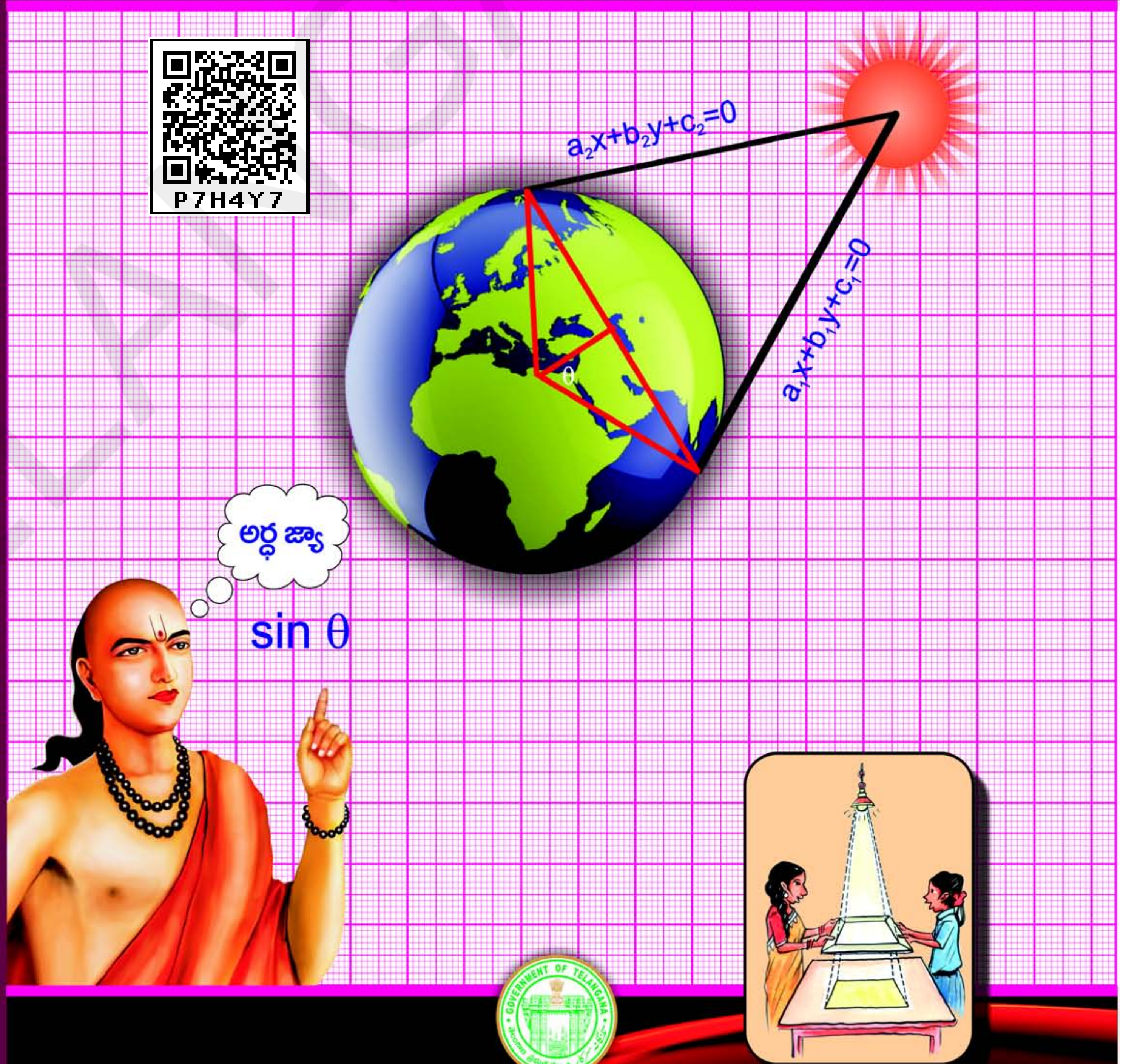
గణితం 10వ తరగతి

FREE

గణితం

10వ తరగతి

P7H4Y7



తెలంగాణ రాష్ట్ర ప్రభుత్వ ప్రచురణ
హైదరాబాదు

తెలంగాణ రాష్ట్ర ప్రభుత్వం వారిచే ఉచిత పంపిణీ

ఎనర్జైజ్డ్ టెక్స్ట్ బుక్ – ఈ పాఠ్యపుస్తకంలోని భావనలను స్పష్టంగా, నిర్దిష్టంగా, ప్రభావవంతంగా అర్థం చేసుకోవడానికి **QR (Quick Response)** కోడ్‌లతో బలోపేతం చేయడం జరిగింది. **QR** కోడ్‌లో చేర్చబడిన అంశాలను స్మార్ట్ ఫోన్‌లో చూడవచ్చు లేదా **LCD** ప్రొజెక్టర్ / కె–యాన్ ప్రొజెక్టర్ ద్వారా తెరపై ప్రదర్శించవచ్చు. **QR** కోడ్‌లలో ఉన్న సమాచారం చాలా వరకు వీడియోలు, యానిమేషన్స్ మరియు స్లైడ్‌ల రూపంలో ఉంటుంది. అంతేకాకుండా ఈ సమాచారం, పుస్తకంలో ఉన్న సమాచారానికి అదనమైనది.

ఈ అదనపు సమాచారం ద్వారా విద్యార్థులు భావనలను స్పష్టంగా అర్థం చేసుకోవడానికి మరియు ఉపాధ్యాయులు తాము నిర్వహించే బోధనా కృత్యాలు అర్థవంతంగా జరగడానికి తోడ్పడతాయి.

ప్రతి అధ్యాయం చివరన ఒక అదనపు **QR** కోడ్‌లో ప్రశ్నలు ఇవ్వబడినాయి. ఇవి, విద్యార్థుల అభ్యసన ఫలితాలను ఏమేరకు సాధించారో మదింపుచేయడానికి తోడ్పడతాయి.

విద్యార్థులు, ఉపాధ్యాయులు **QR** కోడ్‌లలో ఇవ్వబడిన సమాచారాన్ని విరివిగా ఉపయోగించి తరగతిగదిలోని ప్రక్రియలను మరింత ఆనందదాయకంగా, విద్యావంతమైనవిగాను మలచుకుంటారని ఆశిస్తున్నాము.

క్యూఆర్ (QR) కోడ్‌లను ఎలా వాడాలో తెలుసుకుందాం!

ప్రస్తుత పాఠ్య పుస్తకంలో ఈ విధంగా ఉండే క్యూఆర్ కోడ్‌లను పొందుపరచబడినవి.

ఈ క్యూఆర్ కోడ్‌లను ఉపయోగించి ఆసక్తికరమైన పాఠాలను, వీడియోలను, డాక్యుమెంట్స్ మొదలగు వాటిని మీవద్దగల మొబైల్, ట్యాబ్లెట్ లేదా కంప్యూటర్ ద్వారా వీక్షించండి.

దశ	వివరణ
ఎ)	**క్యూఆర్ కోడ్‌లో లింక్ చేయబడిన విషయాలను ఆండ్రాయిడ్ మొబైల్ లేదా ట్యాబ్లెట్‌లో వీక్షించుటకు :**
1	మీ యొక్క మొబైల్ / ట్యాబ్లెట్‌లోని **Play Store** పైన క్లిక్ చేయండి.
2	సెర్చ్‌బార్‌లో **DIKSHA** ను టైప్ చేయండి.
3	 తెరపైన ఇలా కనిపిస్తుంది.
4	**INSTALL** పైన క్లిక్ చేయండి.
5	విజయవంతంగా INSTALL చేసిన తరవాత యాప్‌ను తెరవడానికి **OPEN** పైన క్లిక్ చేయండి.
6	'తెలుగు'ను ఎంపికచేసుకొని క్లిక్ చేయండి.
7	'కొనసాగించడానికి' క్లిక్ చేయండి.
8	విద్యార్థి / ఉపాధ్యాయులు రెండింటిలో మీకు చెందిన దానిని ఎంపిక చేసుకోండి.
9	కుడివైపున ఉన్న క్యూఆర్ కోడ్ చిహ్నం స్కానర్‌ను క్లిక్ చేయండి. తరువాత మీ పాఠ్యపుస్తకములో ముద్రించబడిన క్యూఆర్ కోడ్ ను స్కాన్ చేయండి. (లేదా) సెర్చ్ బార్ నందు ( ) క్యూఆర్ కోడ్ క్రింద ముద్రించబడిన కోడ్‌ను టైపు చేయండి.
10	క్యూఆర్ కోడ్‌లో జతచేయబడిన విషయాలు కనిపిస్తాయి.
11	కావలసిన విషయాలను వీక్షించుటకు లింక్‌పై క్లిక్ చేయండి.
బి)	**క్యూఆర్ కోడ్‌లో లింక్ చేయబడిన విషయాలను కంప్యూటర్ నుండి వీక్షించుటకు -**
1	**https://diksha.gov.in/telangana** అను లింక్‌ను ఓపెన్ చేయండి.
2	**Explore DIKSHA-TELANGANA** పైన క్లిక్ చేయండి.
3	పాఠ్యపుస్తకము నందు ముద్రించబడిన క్యూఆర్ కోడ్ క్రింద ఉన్న కోడ్‌ను టైపు చేయండి.
4	ఈ కోడ్‌కు జతచేయబడిన విషయాలు కనిపిస్తాయి.
5	కావలసిన విషయాలను వీక్షించుటకు లింక్‌పై క్లిక్ చేయండి.

అభ్యసన ఫలితాలు

విద్యార్థులు

- ఇంతకు ముందు నేర్చుకొన్న సంఖ్యల ధర్మాలు మరియు వాటి మధ్య సంబంధాలను సామాన్యీకరించి ఫలితాలను రాబట్టడం ఉదా: యూక్లిడ్ భాగహార న్యాయం, ప్రాథమిక అంకగణిత సిద్ధాంతం వంటి వాటిని ఉపయోగించి దైనందిన జీవిత సమస్యలను సాధించడం
- తార్కిక విశ్లేషణను ఉపయోగించి కరణీయసంఖ్యల నిరూపణలను చేయడం
- ఘాతాంక మరియు సంవర్గమాన రూపాలను గుర్తించడం. సంవర్గమాన ధర్మాల నిరూపణలను చేసి వాటినుపయోగించి సమస్యలను సాధించడం
- సముదాయముల నుండి సమితులను గుర్తిస్తారు మరియు వాటిని పరిమిత, అపరిమిత సమితులుగా వర్గీకరిస్తారు.
- వెన్ చిత్రాల రూపంలో సూచించి సమితులను విశ్లేషిస్తారు.
- ఒక బహుపది శూన్యాలను కనుగొనడంలో బీజీయ మరియు రేఖా చిత్ర పద్ధతుల మధ్య సంబంధాన్ని రూపొందిస్తారు.
- రెండు చర రాశులలో రేఖీయ సమీకరణాల జతకు రేఖా చిత్ర మరియు బీజీయ పద్ధతుల ద్వారా సాధనను కనుగొంటారు.
- ఒక వర్గ సమీకరణము మూలాలను కనుగొనడానికి, మూలాల స్వభావాన్ని కనుగొనడానికి వ్యూహాలను వివరిస్తారు.
- దైనందిన జీవిత సందర్భాలకు AP, GP భావనలను ఆపాదించి వాటి సాధనకు వ్యూహాలను రూపొందిస్తారు.
- నిరూపక తలంలో వివిధ జ్యామితీయ ఆకారాల మధ్య సంబంధాలను నెలకొల్పి అనగా రెండు బిందువుల మధ్య దూరం కనుగొనడం ఇచ్చిన రెండు బిందువుల మధ్యగల బిందువు నిరూపకాలు కనుగొనడం, ఒక త్రిభుజ వైశాల్యం కనుగొనడం మొదలైనవాటికి సూత్రాలను రూపొందిస్తారు.
- సరూప మరియు సర్వసమాన పటాలను వేరుచేయడానికి మార్గాలను కనుగొంటారు.
- రెండు త్రిభుజాల సరూపకత ధర్మాలను తార్కికంగా నిరూపించడానికి అంతకు ముందు నిరూపించబడిన వివిధ జ్యామితీయ నియమాలను అనగా ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతము వంటి వాటిని ఉపయోగించుకోంటారు.
- ఇచ్చిన త్రిభుజానికి, స్కేలు గుణకానికి తగిన సరూప త్రిభుజాన్ని నిర్మిస్తారు.
- జ్యామితీయ నిర్మాణ సోపానాలను పరీక్షించి ప్రతీ సోపానానికి గల కారణాలను తెలుపుతారు.
- వృత్తాల స్పర్శ రేఖలకు సంబంధించిన సిద్ధాంతాలను నిరూపిస్తారు.
- ఒక వృత్తానికి బాహ్య బిందువునుండి స్పర్శరేఖల జతను గీసి పద్ధతులను సకారణంగా వివరిస్తారు.
- జ్యామితీయ నిర్మాణ సోపానాలను పరీక్షించి ప్రతీ సోపానానికి గల కారణాలను తెలుపుతారు.
- వివిధ త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులను, ఇచ్చిన అల్పకోణము దృష్ట్యా (ఒక లంబ కోణ త్రిభుజంలో) కనుగొంటారు.
- అల్ప కోణాలకు త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల మధ్య సంబంధాలను ఏర్పరుస్తారు.
- నిత్య జీవిత సందర్భాలలోని సమస్యలు అనగా వివిధ ఆకారాల ఎత్తులు కనుగొనడం, వాటి నుండి దూరాలను కనుగొనడం వంటి వాటికి త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులను ఉపయోగిస్తారు.
- మన చుట్టూ ఉన్న పరిసరాలలోని వస్తువులను వివిధ ఘనాల సముదాయంగా అనగా స్థూపము మరియు శంఖువు, స్థూపము మరియు అర్ధ గోళము, వివిధ సమ ఘనాల సముదాయము వంటి వాటిగా దృశ్యీకరించి వాటి ఉపరితల వైశాల్యాలను మరియు ఘనపరిమాణాలను కనుగొంటారు.
- ఒక ఆకృతిలో ఉన్న వస్తువు మరొక ఆకృతిలో రూపాంతరము చెందినపుడు దాని ఉపరితల వైశాల్యం కనుగొనే పద్ధతులను వివరిస్తారు.
- నిత్య జీవిత సందర్భాలకు చెందిన వివిధ దత్తాంశాలకు సగటు, మధ్యగతము, బాహుళకములను లెక్కకడతారు.
- ఒక ఘటన సంభావ్యతను కనుగొంటారు మరియు ఆ భావనను దైనందిన జీవిత సమస్యల సాధనకు ఉపయోగిస్తారు.
- పైన నేర్చుకొన్న అంశాలకు చెందిన విద్యార్థులకు పరిచయంలేని సందర్భాలలోని సమస్యలను సాధిస్తారు. ఆ సమస్యలు అంతకుముందు ఆ విద్యార్థికి తెలియనటువంటి సందర్భాలకు చెందినవి అయి ఉండాలి.

గణితం – 10వ తరగతి

పాఠ్యపుస్తక అభివృద్ధి, ప్రచురణ కమిటి

ప్రధాన నిర్వహణాధికారి	:	**శ్రీ జి. గోపాల్‌రెడ్డి,** సంచాలకులు, రాష్ట్ర విద్య, పరిశోధన, శిక్షణ సంస్థ, హైదరాబాదు
ప్రధాన వ్యవహార నిర్వాహకులు	:	**శ్రీ బి. సుధాకర్,** సంచాలకులు, ప్రభుత్వ పాఠ్యపుస్తక ముద్రణాలయం, హైదరాబాదు
కార్యనిర్వాహకులు	:	**డా. నన్నూరు ఉపేందర్‌రెడ్డి,** ప్రొఫెసర్, పాఠ్యప్రణాళిక & పాఠ్య పుస్తక విభాగం రాష్ట్ర విద్య, పరిశోధన, శిక్షణ సంస్థ

చైర్మన్, గణిత ఆధారపత్రం, గణిత పాఠ్యప్రణాళిక, పాఠ్యపుస్తక అభివృద్ధి కమిటీ

ప్రొఫెసర్. వి.కన్నన్

గణితం – సాంఖ్యక శాస్త్ర విభాగం హైదరాబాదు విశ్వవిద్యాలయం, హైదరాబాదు.

ముఖ్యసలహాదారులు

శ్రీ చుక్కా రామయ్య
విద్యావేత్త
తెలంగాణ హైదరాబాదు.

డా. హెచ్.కె.దివాన్
విద్యాసలహాదారు, విద్యాభవన్ సొసైటీ రిసోర్సు సెంటర్
ఉదయ్‌పూర్, రాజస్థాన్

క్యు.ఆర్.కోడ్ టీమ్

K3Z1M7

తెలంగాణ ప్రభుత్వ ప్రచురణ, హైదరాబాదు

చట్టాలను గౌరవించండి
హక్కులను పొందండి

విద్యవల్ల ఎదగాలి
వినయంతో మెలగాలి

First Published 2014

New Impressions 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021

This Book has been printed on 70 G.S.M. Maplitho
Title Page 200 G.S.M. White Art Card

తెలంగాణ ప్రభుత్వం వారిచే ఉచిత పంపిణీ 2021-22

Printed in India
at the Telangana Govt. Text Book Press,
Mint Compound, Hyderabad,
Telangana .

పాఠ్యపుస్తక అభివృద్ధి కమిటి

రచయితలు

శ్రీ తాతా వెంకట రామకుమార్
ప్ర.ఉ., జి.ప.ఉ.పా., ములుమూడి, ఎస్.పి.ఎస్.నెల్లూరు

శ్రీ సోమ ప్రసాద బాబు
పి.జి.టి.ఎపి.టి.డబ్ల్యు.ఆర్.ఎస్., చంద్రశేఖరపురం, ఎస్.పి.ఎస్.నెల్లూరు

డా. పూండ్ల రమేష్
లెక్చరర్, ప్రభుత్వ ఐ.ఎ.ఎస్.ఇ, ఎస్.పి.ఎస్.నెల్లూరు

శ్రీ కొమాండూరు శ్రీధరాచార్యులు
ఎస్,ఎ, జి.ప.ఉ.పా. నార్సింగి, మెదక్

శ్రీ కందాల రామయ్య
ఎస్.ఎ, జి.ప.ఉ.పా. కాసీందేవిపేట్, వరంగల్

శ్రీ రామదుగు లక్ష్మీనరసింహ మూర్తి
ఎస్.ఎ, జి.ప.ఉ.పా. తూప్రాన్‌పేట్, నల్గొండ

శ్రీ గొట్టుముక్కల వి.బి.ఎస్.ఎన్.రాజు
ఎస్.ఎ. పురపాలక ఉన్నత పాఠశాల, కస్బా, విజయనగరం

శ్రీ పడాల సురేష్ కుమార్
ఎస్.ఎ., ప్ర.ఉ.పా.,విజయనగర్‌కాలనీ, హైదరాబాదు

శ్రీ పెద్దాడ డి.ఎల్.గణపతి శర్మ
ఎస్.ఎ., ప్ర.ఉ.పా.జమిస్తాన్‌పూర్,మాణికేశ్వర్ నగర్, హైదరాబాదు

శ్రీ సర్దార్ ధర్మేంద్ర సింగ్
ఎస్.ఎ.,జి.ప.ఉ.పా, మన్నూరు, ఆదిలాబాదు

శ్రీ నాగుల రవి
ఎస్.ఎ, జి.ప.ఉ.పా, లోకేశ్వరం, ఆదిలాబాదు

శ్రీ కాకుళవరం రాజేందర్ రెడ్డి
కో-ఆర్డినేటర్, ఎస్.సి.ఇ.ఆర్.టి., హైదరాబాదు

ముఖ్య సంపాదకులు

డా. హెచ్.కె.దివాన్
విద్యాసలహాదారు, విద్యాభవన్ సొసైటీ రిసోర్సు సెంటర్
ఉదయ్‌పూర్, రాజస్థాన్

సంపాదకులు

ప్రొఫెసర్ వి. శివరామప్రసాదు
విశ్రాంతాచార్యులు, గణిత విభాగం
ఉస్మానియా యూనివర్సిటీ, హైదరాబాదు

ప్రొఫెసర్ ఎన్.సి.హెచ్. పట్టాభిరామాచార్యులు
విశ్రాంతాచార్యులు, ఎన్.ఐ.టి., వరంగల్

శ్రీ ఎ. పద్మనాభం
విశ్రాంత గణిత విభాగ అధిపతి,
మహారాణి కాలేజ్, పెద్దాపురం, తూర్పుగోదావరి

డా.జి.సూర్యనారాయణ మూర్తి
విశ్రాంత రీడర్, రాజా.ఆర్.ఎస్.ఆర్.కె.రంగారావు కాలేజ్
బొబ్బిలి, విజయనగరం.

సమన్వయకర్తలు

శ్రీ కాకుళవరం రాజేందర్‌రెడ్డి
కో-ఆర్డినేటర్, ఎస్.సి.ఇ.ఆర్.టి., హైదరాబాదు

శ్రీ కంకంటి నారాయణరెడ్డి
లెక్చరర్, ఎస్.సి.ఇ.ఆర్.టి., హైదరాబాదు

విద్యావిషయక సహకారం అందించిన వారు

శ్రీ హనీష్ పాలివల్,
విద్యాభవన్ ఎడ్యుకేషన్ రిసోర్సు సెంటర్, ఉదయ్‌పూర్.

కుమారి ప్రీతి మిశ్రా
విద్యాభవన్ ఎడ్యుకేషన్ రిసోర్సు సెంటర్, ఉదయ్‌పూర్.

శ్రీమతి స్నేహబాలజోషి
విద్యాభవన్ ఎడ్యుకేషన్ రిసోర్సు సెంటర్, ఉదయ్‌పూర్.

కుమారి తాన్యసక్సేనా
విద్యాభవన్ ఎడ్యుకేషన్ రిసోర్సు సెంటర్, ఉదయ్‌పూర్.

కుమారి ఎమ్. అర్చన
గణితం సాంఖ్యకశాస్త్ర విభాగం, హైదరాబాదు విశ్వవిద్యాలయం

బొమ్మలు, డిజైనింగ్ సభ్యులు

శ్రీ ప్రశాంత్ సోనీ
విద్యాభవన్ ఎడ్యుకేషన్ రిసోర్సు సెంటర్, ఉదయ్‌పూర్.

శ్రీ ఎస్.ఎమ్. ఇక్రం
విద్యాభవన్ ఎడ్యుకేషన్ రిసోర్సు సెంటర్, ఉదయ్‌పూర్.

శ్రీ భవాని శంకర్
విద్యాభవన్ ఎడ్యుకేషన్ రిసోర్సు సెంటర్, ఉదయ్‌పూర్.

శ్రీ సుంకర కోటేశ్వరరావు
పవన్ గ్రాఫిక్స్, విజ్ఞాన్‌పురికాలనీ, విద్యానగర్, హైదరాబాద్.

శ్రీమతి సుంకర సునీత
పవన్ గ్రాఫిక్స్, విజ్ఞాన్‌పురికాలనీ, విద్యానగర్, హైదరాబాద్.

కవర్‌పేజ్ డిజైనింగ్

శ్రీ కె.సుధాకరాచారి, హెడ్‌మాస్టర్, యు.పి.ఎస్.నీలికుర్తి, మం.మరిపెడ, జి.వరంగల్

ముందుమాట

మానవ వికాసానికి, సాధికారతకు, స్వయం సిద్ధమైన అభివృద్ధికి 'విద్య' ఒక మూలాధారం. విద్యకు గల ఈ అద్భుతమైన శక్తిని గుర్తించి అభివృద్ధి పథంలో ముందుకు సాగే అన్ని సమాజాలు 'సార్వజనీన ప్రాథమిక విద్య'కు అత్యంత ప్రాధాన్యత నిచ్చి, ప్రతీ ఒక్కరికీ గుణాత్మక విద్యను అందించాలనే స్పష్టమైన గమ్యాన్ని నిర్దేశించుకున్నాయి. దీనికి కొనసాగింపుగా మాధ్యమిక విద్యను కూడా సార్వజనీనం చేయాల్సిన ఆవశ్యకత ఏర్పడింది.

విద్యార్థి ప్రాథమిక స్థాయి వరకు నేర్చుకున్న కృత్యాత్మక గణితము క్రమంగా నియమబద్ధ గణితంగా మారేందుకు మాధ్యమిక స్థాయి దోహదపడుతుంది. గణితాంశాలను హేతుబద్ధంగా నేర్చుకోవడం, సమస్యలు విశ్లేషించి సాధించడం, సిద్ధాంతాల తార్కిక నిరూపణ వంటివి ఈ స్థాయిలో ప్రవేశపెట్టారు. ఈ దశలో గణితం ఒక ప్రత్యేక బోధనా విషయంగా కాక, ఇతర విషయాలతో అవినాభావ సంబంధము కలిగి, కార్యకారణ సంబంధాలు విశ్లేషించే సహజ విధానాలు పొందుపరచబడ్డాయి. ఈ విధానాల ద్వారా ప్రతి విద్యార్థి కావలసిన మానసిక స్థైర్యాన్ని పొంది, నేర్చుకొన్న అంశాలను వారి జీవితానుభవాలతో జోడించి జ్ఞాన నిర్మాణానికి, ఉన్నత తరగతుల కొనసాగింపునకు ప్రేరణ పొంది ఉన్నత విద్యావంతులై మంచి పౌరులుగా మారేందుకు కృషి చేయాలి.

మన రాష్ట్రంలో చదువుతున్న విద్యార్థులందరూ గణితాభ్యసనాన్ని ఇష్టంతో కొనసాగించడానికి, వారి జీవితానుభవాలను జోడించి గణిత సమస్యల రూపకల్పనకు, వాటిని సాధించడానికి ఈ గణిత పాఠ్యపుస్తకంలోని మౌలిక భావనలు తోడ్పడతాయని ప్రగాఢంగా విశ్వసిస్తున్నాము.

విద్యార్థులు గణితాన్ని కేవలం మార్కులు సంపాదించుకొనుటకు మాత్రమేకాక, గణిత పాఠ్యప్రణాళికలో యిమిడి వున్న అమూర్త కీలక భావనలు నేర్చుకునే విధంగా ఉపాధ్యాయులు ప్రోత్సహించవలసి ఉంది. గణిత బోధనాభ్యసన ప్రక్రియలో వివిధ స్థాయిల విద్యార్థులను భాగస్వాములను చేయడం, వారికి గణిత పఠనం పట్ల సానుకూల దృక్పథం కలిగించడం, వారి వైయుక్తిక విభేదాలను, జీవన విధానాలలోని భేదాలను దృష్టిలో వుంచుకొని, వారికి విశ్వాసం కలిగించేటట్లు బోధన కొనసాగితే అది వారి జీవన గమ్యాల సాఫల్యానికి దోహదపడుతుంది. ఈ విధమైన జ్ఞాన నిర్మాణానికి ఈ పాఠ్యపుస్తకం చేసిన ప్రయత్నం మీ కృషితో ఫలవంతమవుతుందని ఆశిస్తున్నాము.

రాష్ట్ర విద్యాప్రణాళిక పరిధి పత్రం 2011(SCF 2011) కు అనుగుణంగా విస్తృతంగా రూపొందించబడిన గణిత ఆధారపత్రంలోని అంశాల ఆధారంగా నిర్ధారించిన విద్యాప్రమాణాలను ప్రతీస్థాయిలో సాధించాల్సి ఉంది.

గణిత పాఠ్యపుస్తకాన్ని ఆకర్షణీయంగా, ప్రమాణాలకు అనుగుణంగా తీర్చిదిద్దడంలో అవిరళ కృషి చేసిన పాఠ్యపుస్తక అభివృద్ధి కమిటీ సభ్యులను, పుస్తక రూపకల్పనలో పాలు పంచుకున్న ఉపాధ్యాయులను, అధ్యాపకులను రాష్ట్ర విద్య, పరిశోధన, శిక్షణ సంస్థ అభినందిస్తుంది. ఇదేవిధంగా పాఠ్యపుస్తకాల రూపకల్పనకు పరిపాలనా పరంగా సహకరించిన జిల్లా విద్యాశాఖాధికారులు, మండల విద్యాశాఖాధికారులు, పాఠశాలల ప్రధానోపాధ్యాయులకు ప్రత్యేక ధన్యవాదాలు. పాఠ్యపుస్తక అభివృద్ధిలో మమ్ములను ముందుండి ప్రోత్సహించిన కమీషనర్ మరియు డైరెక్టర్, పాఠశాల విద్య, తెలంగాణ గారికి, విద్యాభవన్ సొసైటీ, ఉదయపూర్, రాజస్థాన్‌కు కృతజ్ఞతలు. రాబోయే కాలంలో పాఠ్యపుస్తకం మరింత గుణాత్మకంగా అభివృద్ధి చెందడానికి మీ అందరి నుండి సలహాలు, సూచనలు ఆహ్వానిస్తున్నాము.

స్థలం : హైదరాబాదు

తేది : 17 అక్టోబర్, 2013

సంచాలకులు

రాష్ట్ర విద్య, పరిశోధన, శిక్షణ సంస్థ

హైదరాబాద్.

పీఠిక

విద్యార్థులు మూడు సంవత్సరములు ప్రాథమిక (ఎలిమెంటరీ) (6, 7, 8), ఒక సంవత్సరము మాధ్యమిక స్థాయి (9) అభ్యసనమును పూర్తి చేసి ఈ పాఠ్యపుస్తకమును అభ్యసించనున్నారు. విద్యార్థులు ఈ సంవత్సరముతో తమ పాఠశాల విద్యను పూర్తి చేయనున్నారు. కనుక ప్రతీ విద్యార్థి కావలసిన మానసిక స్థైర్యము, నేర్చుకొన్న అంశాలను వారి జీవిత అనుభవాలతో జోడించి, జ్ఞాన నిర్మాణమునకు దాని కొనసాగింపుకు కృషి చేయాలి.

గణితము ప్రతివ్యక్తికి ఆవశ్యకమైన అంశము. అందుచే పాఠశాల విద్యలో మాధ్యమికస్థాయి వరకు గణితమును ఒక బోధనాంశముగా చేర్చడమైనది. ప్రస్తుత కాలములో కూడా గణిత అభ్యసమును క్లిష్టముగా, ఇతర విషయాలతో పోల్చితే కష్టమైన అంశముగా పిల్లలు, పెద్దలు కూడా భావిస్తున్నారు. పిల్లలకు, ఉపాధ్యాయులకు మాత్రమే కాక సమాజమునకు కూడా గణిత అభ్యసనము కష్టసాధ్యం అన్న అంశము సర్వవ్యాపితమయినది. ఈ దశలో గణితం ఒక ప్రత్యేక బోధనా విషయంగానే కాకుండా ఇతర విషయాలతో అవినాభవ సంబంధము కలిగి ఉండే, నిత్యపురోగామి అయ్యే జ్ఞాన విభాగముగా గుర్తించవలసిన ఆవశ్యకత యున్నది. గణిత అభ్యసనము కేవలము మార్కులు సంపాదించుట కొరకు మాత్రమే కాదు, పాఠశాల బయట జీవితం (నిజజీవితం)లో ఎన్నో సందర్భాలలో ఉపయోగించి కార్యసిద్ధులయ్యే విధముగా తీర్చదిద్దగల్గి గణిత అభ్యసనము పట్ల భయం పోయి ఆసక్తి పెరుగుతుంది.

గణితబోధనలో మనము ఎదుర్కొనే సమస్యలలో ప్రధానమైనది గణిత భావనలను వ్యక్తపరిచే విధానము. గణిత బోధన కేవలం సంఖ్యలు, క్లిష్టతరమైన గణనలు, నిర్వచనములు, జ్ఞాపకముపై ఆధారపడే సత్యములు, క్రమయుత విధానములు, సులువు పద్ధతులు (short cuts) మరియు ఉపపత్తులతో కూడిన సాధనలు కేంద్రీకృతము అయి ఉన్నది. అన్వేషణ, అవగాహన, నూతన ఆలోచనలు, భావనల సృష్టిలను ప్రోత్సహిస్తూ గణిత సమస్యల సాధన ఒకే పద్ధతి ఉంటుందన్న అపోహను పారద్రోలి సమస్యా సాధనను భిన్న మార్గాలలో చేయవచ్చుననే భరోసా కల్పించాలి.

ఈ పాఠ్యపుస్తకం ద్వారా విద్యార్థులు సమస్యాసాధనకు పలు మార్గాలు, పద్ధతులను ఎన్నుకొని గణిత భావనలను అర్థము చేసుకునేందుకు కావలసిన అమరికల అన్వేషణ భావనల మధ్య సంబంధమును గుర్తించి ఏర్పరచుట మరియు తార్కిక చింతన పొందుతారు. ఉపాధ్యాయులు, విద్యార్థులు ఈ పాఠ్యపుస్తక అధ్యయనం ద్వారా భావనల అవగాహన. సూత్రీకరణ మరియు వివిధ సమస్యలకు భిన్నమైన సాధనా విధానములు కనుగొనే నైపుణ్యమును పొందే విధముగా తర్ఫీదునివ్వాలి. విద్యార్థి సమస్యాసాధనలో స్వతంత్రముగా, గ్రూపులుగా మారి చర్చించి, విశ్లేషించి తార్కికతతో కూడి సులభమైన విధానమును కనుగొనాలి. విద్యార్థులు భావనలను చర్చించి నూతన గణిత సమస్యలను కనుగొనే విధముగా తయారు కావాలని ఆశిస్తున్నాము. విద్యార్థులు గణితము అనగా కేవలం సమస్యా సాధనయే కాదు, ఇతర విద్యార్థులు కనుగొన్న, ఉపయోగించిన వివిధ పద్ధతులను చర్చావిధానములను విశ్లేషణ చేసే స్థాయిని పెంపొందించేదిగా గుర్తించాలి. కష్టపడి గణిత అభ్యసనము చేయుట కంటే ఇష్టపడి గణిత అభ్యసనము సాగేలా కృషి చేయాలి.

పదవతరగతి, విద్యార్థుల యొక్క సెకండరీస్థాయిలో చివరి సంవత్సరం. విద్యార్థులు నేర్చుకొన్న గణిత భావనలను నిజజీవితములోని సంఘటనలతో అన్వయించగల్గుతాడు. కాని నిజజీవిత సంఘటనలన్నింటికి గణిత భావనలను అన్వయించలేము. ఈ స్థాయి పూర్తి చేసిన విద్యార్థులు ఒక అనుషంగికమును (Conditional Statement) ఏ విధముగా ఋజువు చేస్తారో, ఆ తార్కికక్రమమును రాసే విధానమును నేర్చుకొంటారు.

గణిత అభ్యసనము యొక్క ముఖ్య ఉద్దేశ్యము, పీఠిక మరియు 10వ తరగతి పాఠ్యపుస్తకములో చెప్పిన విధముగా విద్యార్థులు తమ యొక్క గణితానుభవాలను, అన్వేషణలను గణితీకరణము చేయాలి. తరగతి గదిలో నేర్చుకొన్న అమూర్త భావనలను అవగాహన చేసుకొని, తమ అనుభవాలను క్రమబద్ధీకరించి, నిర్మాణాత్మక కృషి ద్వారా పరిపుష్టి చేయాలి. గణితభావనలను గణిత పరిభాషలో వ్యక్తీకరించే సామర్థ్యమును విద్యార్థులు కల్గి యుండాలి. ఈ పాఠ్యపుస్తకము ఎందరో విషయనిపుణులతో చర్చించి వారి అమూల్య సలహాలను క్రోడీకరించి ఆధారపత్రం, విద్యాప్రమాణాలు ఆధారముగా చేసుకొని తయారుచేయబడింది. విశేష అనుభవజ్ఞులయిన రచయితల కృషి ఫలితము ఈ పాఠ్యపుస్తకం. సద్విమర్శలతో, సూచనలతో ఈ పుస్తకమును మరింత పరిపుష్టి చేసే అందరికి మా హృదయపూర్వక అభివందనాలు.

ఇట్లు

పాఠ్యపుస్తక అభివృద్ధి కమిటి

గణితం 10వ తరగతి

జాతీయ గీతం

- రవీంద్రనాథ్ ఠాగూర్

జనగణమన అధినాయక జయహే!
భారత భాగ్యవిధాతా!
పంజాబ,సింధ్, గుజరాత, మరాఠా,
ద్రావిడ, ఉత్కళ, వంగ!
వింధ్య, హిమాచల, యమునా, గంగ!
ఉచ్ఛల జలధి తరంగ!
తవ శుభనామే జాగే!
తవ శుభ అశిష మాంగే
గాహే తవ జయగాథా!
జనగణ మంగళదాయక జయహే!
భారత భాగ్య విధాతా!
జయహే! జయహే! జయహే!
జయ జయ జయ జయహే!!

ప్రతిజ్ఞ

- పైడిమఱ్ఱి వెంకట సుబ్బారావు

భారతదేశం నా మాతృభూమి, భారతీయులందరూ నా సహోదరులు.
నేను నా దేశాన్ని ప్రేమిస్తున్నాను, సుసంపన్నమైన, బహువిధమైన నా దేశపు
వారసత్వ సంపద నాకు గర్వకారణం. దీనికి అర్హత పొందడానికి సర్వదా నేను కృషి చేస్తాను.
నా తల్లిదండ్రుల్ని, ఉపాధ్యాయుల్ని, పెద్దలందర్ని గౌరవిస్తాను.
ప్రతి వారితోను మర్యాదగా నడుచుకొంటాను. జంతువుల పట్ల దయతో ఉంటాను.
నా దేశం పట్ల, నా ప్రజల పట్ల సేవానిరతితో ఉంటానని ప్రతిజ్ఞ చేస్తున్నాను.
వారి శ్రేయోభివృద్ధులే నా ఆనందానికి మూలం.

అధ్యాయము

1

వాస్తవ సంఖ్యలు

(Real Numbers)

V6K7G3

1.1 పరిచయం

"పూర్ణ సంఖ్యలు దేవుడి సృష్టి మిగతాదంతా మానవుడి కృషి" – లీపోల్డ్ క్రానేకర్.

మన జీవితం సంఖ్యలతో ముడిపడి ఉంది. మీరు పుట్టిన సమయాన్ని గుర్తు తెచ్చుకోండి. మీ పుట్టిన సమయాన్ని, మీ బరువును, మీ పొడవును, ముఖ్యంగా మీ కాళ్ళు మరియు చేతుల వేళ్ళ సంఖ్యను మీ తల్లిదండ్రులు గణించి ఉంటారు. సంఖ్యలు అలా మొదలై మన జీవితమంతా చివరి దాకా మనతోటే ఉంటాయి.

సంఖ్యలను మనం ఇంకా ఏయే సందర్భాలల్లో వాడుతాం? మన వయస్సు, ఆదాయ వ్యయాలు మరియు పొదుపులను గణించే సమయంలో సంఖ్యలను ఉపయోగిస్తాం కదా!

సంఖ్యల యొక్క మరికొన్ని భావనలను మనం ఈ అధ్యాయంలో తెలుసుకోబోతున్నాం. గణిత సామ్రాజ్యంలో సంఖ్యలు ప్రధాన భూమికను పోషిస్తాయి. సంఖ్యల యొక్క గొప్పదనాన్ని మరియు వాటి యొక్క అబ్బుర పరిచే ధర్మాలను అన్వేషించబోతున్నాం. కొన్ని సంఖ్యల సముదాయాలలోని అమరికలు వాటిలోని సౌందర్యం ద్వారా మనకు అందమైన అనుభూతిని కలుగజేస్తాయి.

అందుకోసం, ఇప్పుడు ఒక పజిల్‌ను పరిశీలిద్దాం.

మీరు ఒక తోటలో విహరిస్తున్నప్పుడు తేనెటీగల గుంపు పువ్వులపై వాలడం గమనించే ఉంటారు కదా! అలాంటి ఒక సందర్భాన్ని ఊహిద్దాం. ఒక తేనెటీగల గుంపు రెండు పువ్వులపై సమాన సంఖ్యలో వాలినప్పుడు ఒక తేనెటీగ మిగిలిపోయింది. అదే గుంపు మూడు పువ్వులపై సమాన సంఖ్యలో వాలినప్పుడు రెండు తేనెటీగలు మిగలగా అదే గుంపు నాలుగు పువ్వులపై సమానసంఖ్యలో వాలినప్పుడు మూడు తేనెటీగలు మిగిలిపోయినవి. ఇంకా ఆ తేనెటీగల గుంపు ఐదు పువ్వులపై సమానసంఖ్యలో వాలినప్పుడు తేనెటీగలు ఏవి మిగిలిపోలేదు. ఒకవేళ ఆ గుంపు గరిష్ఠంగా యాభై తేనెటీగలనే కలిగి ఉందనుకుంటే అప్పుడు ఆ గుంపులోని తేనెటీగల సంఖ్య ఎంత ఉండవచ్చు?

ఈ పజిల్‌ను విశ్లేషించి సాధిద్దామా?

ఆ తేనెటీగల గుంపులోని తేనెటీగల సంఖ్యను 'x' అనుకుంటే

ఈ సమస్యా సాధనను చివరి నుండి వెనుకకు ఆలోచిస్తే మొదటగా $x \leq 50$ రాస్తాం.

ఆ తేనేటీగల గుంపును ఐదు సమాన భాగాలుగా విభజిస్తే ఒక తేనేటీగ కూడా మిగలదుకదా! ఈ సమాచారాన్ని ఏదేని ఒక సహజ సంఖ్య 'a' కు అనుగుణంగా $x = 5a + 0$ గా రాయవచ్చు.

అదే తేనెటీగల గుంపును నాలుగు సమాన భాగాలుగా విభజిస్తే మూడు తేనెటీగలు మిగిలినవి. ఈ సమాచారాన్ని ఏదేని ఒక సహజ సంఖ్య 'b' కు అనుగుణంగా $x = 4b + 3$ గా రాయవచ్చు.

ఇంకా అదే తేనెటీగల గుంపును మూడు సమాన భాగాలుగా విభజిస్తే రెండు తేనెటీగలు మిగిలినవి. ఈ సమాచారాన్ని ఏదేని ఒక సహజ సంఖ్య 'c' కు అనుగుణంగా $x = 3c + 2$ గా రాయవచ్చు.

ఇంకా అదే తేనెటీగల గుంపును రెండు సమాన భాగాలుగా విభజిస్తే ఒక తేనెటీగ మిగిలినది. ఈ సమాచారాన్ని ఏదేని ఒక సహజ సంఖ్య 'd' కు అనుగుణంగా $x = 2d + 1$ గా రాయవచ్చు.

వీటిని గమనిస్తే ప్రతీ సందర్భంలో ఒక x మరియు దానికి అనుగుణమైన ధనపూర్ణ సంఖ్య y (ఈ ఉదాహరణలో y విలువలు వరుసగా 5, 4, 3, 2)లు భాజకాలుగా ఉన్నాయి. ఇంకా x ను y భాగించినప్పుడల్లా శేషం 'r' (ఇచ్చట r విలువలు వరుసగా 0, 3, 2, 1) వచ్చే విధంగా ఉన్నాయి.

ఈ పూర్తి విషయాన్ని గమనిస్తే **"ప్రతీ సందర్భంలో r విలువ y కంటే తక్కువ"**.

ఈ సందర్భాల్లో పై సమీకరణాలను రాసేటప్పుడు మనకు తెలియకుండానే "**భాగాహార విశేషవిధి**" (Division algorithm)ను ఉపయోగించినాము.

ఇక మళ్ళీ మనం సమస్యా సాధనలోకి వెళితే, ఏ విధంగా సాధించవచ్చో తెలుసా? ముందుగా మనం $x = 5a + 0$ రాశాం. కాబట్టి ఆ తేనెటీగల గుంపులోని తేనెటీగల సంఖ్య 5 యొక్క గుణిజాలలో ఉండవచ్చని గ్రహిస్తాం.

ఒక సంఖ్యను 2చే భాగించినప్పుడు శేషం 1 వస్తే ఆ సంఖ్య బేసి సంఖ్య కావాలి. కాబట్టి ఈ సందర్భంలో 5 యొక్క గుణిజాలలో బేసి సంఖ్యలైన 5, 15, 25, 35 మరియు 45 లు వాటిని పరిగణనలోకి తీసుకోవాలి. మిగతా రెండు నిబంధనలను వీటిపై ప్రయోగిస్తే మనకు ఆ సంఖ్య 35 అని తెలుస్తుంది.

కాబట్టి ఆ తేనెటీగల గుంపులో 35 తేనెటీగలు ఉన్నాయి.

ఇక మన జవాబును సరిచూద్దామా!

35ను 2 చే భాగిస్తే శేషం 1 వస్తుంది. దీనిని

$35 = 2 \times 17 + 1$ గా రాయవచ్చు.

35 ను 3చే భాగిస్తే శేషం 2 వస్తుంది. దీనిని

$35 = 3 \times 11 + 2$ గా రాయవచ్చు.

35 ను 4చే భాగిస్తే శేషం 3 వస్తుంది. దీనిని

$35 = 4 \times 8 + 3$ గా రాయవచ్చు.

అలాగే 35 ను 5 చే భాగిస్తే శేషం 0 వస్తుంది. దీనిని

$35 = 5 \times 7 + 0$ గా రాయవచ్చు.

ఈ సాధనలోని విషయాన్ని ఈ విధంగా చెప్పవచ్చు. ప్రతి జత ధనపూర్ణ సంఖ్యలు a మరియు b (వరుసగా విభాజ్యం మరియు భాజకములు)లకు అనుగుణంగా పూర్ణాంకాలైన q మరియు r (వరుసగా భాగఫలం మరియు శేషం)లను $a = bq + r, 0 \leq r < b$ ను సంతృప్తి పరిచే విధంగా కనుగొనవచ్చు.

ఇవి చేయండి

$a = bq + r$ అయ్యే విధంగా ధనపూర్ణ సంఖ్యలు a మరియు b లకు అనుగుణంగా q మరియు r ల విలువలను కనుక్కోండి.

(i) $a = 13,\quad b = 3$ (ii) $a = 80,\ b = 8$ (iii) $a = 125,\ b = 5$

(iv) $a = 132,\ b = 11$

ఆలోచించి - చర్చించండి

పై 'ఇవి చేయండి'లోని q మరియు r ల స్వభావం ఏమిటి?

సిద్ధాంతం-1.1 : భాగాహార విశేషవిధి (Division Algorithm) **:** a, b అనే ధన పూర్ణాంకాలు ఇచ్చినపుడు $a = bq + r,\ 0 \le r < b$ అయ్యేవిధంగా ఏకైక జత పూర్ణాంకాలు q, r లు వ్యవస్థితం అవుతాయి.

పై ఫలితం చాలా కాలంగా అందరికి తెలిసినప్పటికీ యూక్లిడ్ 'ఎలిమెంట్స్' పుస్తకాల సంకలనంలోని 7వ పుస్తకంలో మొట్టమొదటగా నమోదు చేయబడింది.

పై భాగాహార శేషవిధి మీద యూక్లిడ్ విశేష విధి ఆధారపడి ఉంది. ఇవ్వబడిన రెండు పూర్ణ సంఖ్యల యొక్క గరిష్ఠ సామాన్య భాజకం (గ.సా.భా.) ను కనుక్కోవడానికి భాగాహార విశేషవిధిని ఉపయోగించవచ్చు.

రెండు ధనపూర్ణ సంఖ్యలు a, b ల సామాన్య కారణాంకాలు అన్నింటిలోకి అతిపెద్ద సామాన్య కారణాంకం d వాటి గ.సా.భా అవుతుందని జ్ఞప్తికి తెచ్చుకోండి.

ఉదాహరణకు 60 మరియు 100 ల గ.సా.భా కనుగొనాలనుకొందాం. దీనిని ఒక కృత్యం ద్వారా కనుక్కుందాం.

కృత్యం

60 సెం.మీ., 100 సెం.మీ.ల పొడవులు మరియు సమాన వెడల్పులు కలిగిన రెండు పేపర్ ముక్కలను తీసుకుందాం. ఈ రెండు పేపర్ ముక్కలలోని ఏ భాగము మిగలకుండా పూర్తిగా కొలవడానికి ఉపయోగించగల గరిష్ఠ పొడవు గల పేపర్ ముక్కను కనుగొనుట మన లక్ష్యము.

60 సెం.మీ. ల పొడవు గల పేపర్ ముక్కతో 100 సెం.మీ పొడవు గల పేపర్ ముక్కను కొలచినట్లైతే ఇంకా 40 సెం.మీ. భాగము మిగిలిపోతుంది.

ఇప్పుడు 40 సెం.మీ.ల పొడవు గల పేపర్ ముక్కతో 60 సెం.మీ. పొడవు గల పేపర్ ముక్కను కొలుద్దాం. ఇప్పుడు కూడా 20 సెం.మీ.ల భాగం మిగిలిపోతుంది. అలాగే 20 సెం.మీ.ల పొడవు గల పేపర్ ముక్కతో 40 సెం.మీ.ల పొడవు గల పేపర్ ముక్కను కొలుద్దాం. ఇప్పుడు 20 సెం.మీ.ల భాగం మిగిలిపోతుంది. మిగిలిన 20 సెం.మీ. ల భాగంను గతంలో ఉపయోగించిన 20 సెం.మీ.ల పొడవు గల పేపర్ ముక్కతో కొలిచినట్లయితే ఆ రెండు ఒకదానికొకటి ఏకీభవిస్తాయి. అనగా ఇక్కడ ఏమీ మిగలదు.

కావున 60 సెం.మీ., మరియు 100 సెం.మీ. పొడవులు కలిగిన రెండు పేపర్ ముక్కలలోని ఏ భాగం మిగలకుండా పూర్తిగా కొలవడానికి ఉపయోగించగల పేపర్ ముక్క యొక్క గరిష్ఠ పొడవు 20 సెం.మీ. లు అని గమనించవచ్చు.

60 మరియు 100 ల గ.సా.భాను కనుగొనడానికి యూక్లిడ్ భాగాహార విశేషవిధిని ఇంతకుముందటి కృత్యానికి అన్వయిద్దాం.

100 ను 60 చే భాగించగా శేషం 40 వస్తుంది. దీనిని

$100 = (60 \times 1) + 40$ గా రాయవచ్చు.

పై దానిలోని భాజకం 60 మరియు శేషం 40 పై భాగాహార విశేషవిధి అనువర్తింపజేయగా దానిని

$60 = (40 \times 1) + 20$ గా రాయవచ్చు.

పై దానిలోని భాజకం 40 మరియు శేషం 20 పై భాగాహార విశేషవిధిని అనువర్తింపజేయగా దానిని

$40 = (20 \times 2) + 0$ గా రాయవచ్చు.

పై దానిలో శేషం 0 వచ్చింది. అలాగే ఇంకా ఈ సాధనను ముందుకు కొనసాగించలేము.

పై చివరి సోపానంలోని భాజకమైన 20 అనేది 60 మరియు 100 అను సంఖ్యలను నిశ్శేషంగా భాగిస్తుంది. కావున వాటి గ.సా.భా. 20 అని చెబుతాం.

60 మరియు 100 లకు కారణాంకాలు అన్నింటిని రాసి దీనిని సులభంగా సరిచూడవచ్చు. మనం పై పద్ధతిలో ఒక వరుస క్రమంలో ఉండే సోపానాలను అనుసరిస్తామని గమనించవచ్చు. దీనిని యూక్లిడ్ విశేషవిధిగా ప్రవచించవచ్చు.

c మరియు d లు ధనపూర్ణాంకములు $c > d$ అనుకొనుము, వాటి గ.సా.భా ఈ క్రింది సోపానముల ద్వారా కనుగొనవచ్చును.

సోపానము 1 : భాగహార శేషవిధి c మరియు d లకు అనువర్తింపచేయగా $c = dq + r, 0 \leq r < d$ అయ్యేటట్లు q మరియు r అనే ఏకైక జత పూర్ణాంకములు వ్యవస్థితమవుతాయి.

సోపానము 2 : $r = 0$ అయితే c మరియు d ల గ.సా.భా d, $r \neq 0$ అయితే d మరియు r ల పై భాగహార న్యాయమును అనువర్తింపచేయండి.

సోపానము 3 : ఈ పద్ధతి శేషము సున్నా వచ్చేంతవరకు కొనసాగించండి. ఈ చివరి సోపానములోని విభాజకము కావలసిన గ.సా.భా అవుతుంది.

ఇచ్చట HCF (c, d) = HCF (d, r) కావున యూక్లిడ్ విశేషవిధి HCF కనుగొనుటకు పని చేయును. m మరియు n లు ధనపూర్ణ సంఖ్యలైన, m మరియు n ల గ.సా.భా HCF (m, n) తో సూచిస్తాము.

ఇవి చేయండి

యూక్లిడ్ విశేషవిధి ఉపయోగించి క్రింది వాటి యొక్క గ.సా.భాను కనుగొనండి.

(i) 50 మరియు 70 (ii) 96 మరియు 72 (iii) 300 మరియు 550

(iv) 1860 మరియు 2015

ఆలోచించి - చర్చించండి

యూక్లిడ్ సోపాన క్రమం ఉపయోగించి 1.2 మరియు 0.12 ల గ.సా.భాను మీరు కనుగొనగలరా? మీ జవాబును సమర్థించండి.

యూక్లిడ్ విశేషవిధి కేవలం పెద్దసంఖ్యల గ.సా.భాను కనుగొనడానికి మాత్రమే కాకుండా కంప్యూటర్ ప్రోగ్రామింగ్ కోసం మొదట్లో వాడబడిన అల్‌గారిథమ్‌లలో ఒక అల్‌గారిథమ్.

గమనించదగిన అంశాలు:

1. యూక్లిడ్ విశేషవిధి మరియు భాగహార విశేషవిధి రెండు ఒకదానికొకటి పరస్పరం అంతర్గతంగా ముడిపడి ఉన్నందున భాగహార విశేషవిధిని యూక్లిడ్ భాగహార విశేషవిధిగా కూడా పరిగణిస్తాం.
2. యూక్లిడ్ విశేషవిధి కేవలం ధనపూర్ణ సంఖ్యలపైనే నిర్వచింపబడినా, దానిని అన్ని శూన్యేతర పూర్ణ సంఖ్యల (అనగా a మరియు $b \neq 0$) కు అనువర్తింపజేయవచ్చు. కాని ఈ విషయాన్ని ఇక్కడ చర్చించము.

సంఖ్యాధర్మాలను కనుగొనడంలో భాగహార విశేషవిధి యొక్క అనువర్తనాలు చాలా ఉన్నాయి. వాటిలో కొన్ని పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ-1 : q అనేది ఒక పూర్ణసంఖ్య అయిన, ప్రతి ధన సరి పూర్ణ సంఖ్య $2q$ రూపంలో మరియు ప్రతి ధన బేసి పూర్ణ సంఖ్య $2q + 1$ రూపంలో ఉంటుందని చూపండి.

సాధన : a ఏదైనా ధన పూర్ణ సంఖ్య, $b = 2$ అనుకొనుము. భాగహార శేష విధిని అనుసరించి $a = 2q + r$, ఏదైనా పూర్ణ సంఖ్య $q \geq 0$ కు మరియు $r = 0$ లేదా $r = 1$ అవుతుంది. ఎందుకంటే $0 \leq r < 2$. కాబట్టి, $a = 2q$ లేదా $2q + 1$ అవుతుంది.

ఏదైనా ధనపూర్ణ సంఖ్య సరి లేదా బేసి సంఖ్య అవుతుంది. a అనేది $2q$ రూపంలో ఉంటే అది సరిపూర్ణ సంఖ్య అవుతుంది. a అనేది సరిపూర్ణ సంఖ్య కానియెడల అది బేసి పూర్ణసంఖ్య అవుతుంది కాబట్టి అది $2q + 1$ రూపంలో ఉంటుంది.

ఉదాహరణ-2 : q అనే ఒక పూర్ణ సంఖ్యకి ప్రతి ధనబేసి సంఖ్య $4q + 1$ లేదా $4q + 3$ రూపంలో ఉంటుందని చూపండి.

సాధన : a ఏదైనా ఒక ధన బేసి పూర్ణ సంఖ్య అనుకొందాం. భాగహార శేష విధిని a మరియు $b = 4$ పై అనువర్తింప చేయగా $a = 4q + r$, $r \geq 0$ వచ్చును.

$0 \leq r < 4$, కావున సాధ్యపడే శేషాలు 0, 1, 2 మరియు 3 అవుతాయి.

వీటి ఆధారంగా a యొక్క విలువలు $4q$, $4q + 1$, $4q + 2$ లేదా $4q + 3$ (q భాగఫలానికి) కావచ్చు. $4q = 2\,(2q)$ లేదా $4q + 2 = 2\,(2q + 1)$ లు 2 చే నిశ్శేషంగా భాగించబడతాయి. కావున అవి బేసి సంఖ్యలు అయ్యే అవకాశం లేదు. అందువల్ల బేసి సంఖ్య a యొక్క రూపం $4q + 1$ లేదా $4q + 3$ అవుతుంది.

అభ్యాసం - 1.1

1. యూక్లిడ్ విశేషవిధి ఆధారంగా క్రింది జతల గ.సా.భాను కనుగొనండి.
   (i) 900 మరియు 270 (ii) 196 మరియు 38220 (iii) 1651 మరియు 2032
2. q అనే ఒక పూర్ణ సంఖ్యకి ప్రతి ధన బేసి పూర్ణ సంఖ్య $6q + 1$ లేదా $6q + 3$ లేదా $6q + 5$ రూపంలో ఉంటుందని భాగహార విశేషవిధి ఆధారంగా చూపండి.
3. ఏదైనా ధనపూర్ణ సంఖ్య యొక్క వర్గం $3p$ లేదా $3p + 1$ రూపంలో ఉంటుందని భాగహార విశేషవిధి ఆధారంగా చూపండి.
4. ఏదైనా ధనపూర్ణ సంఖ్య యొక్క ఘనం $9\,m$ లేదా $9m + 1$ లేదా $9m + 8$ రూపంలో ఉంటుందని భాగహార విశేషవిధి ఆధారంగా చూపండి.
5. ఏదైనా ధనపూర్ణ సంఖ్య n కు $n,\ n+2$ లేదా $n+4$ లలో ఒకే ఒకటి మాత్రమే 3 చే భాగింపబడుతుందని చూపండి.

1.2 ప్రాథమిక అంకగణిత సిద్ధాంతము

భాగహార విశేషవిధి ప్రకారం "$a = bq + r,\ \ 0 \le r < b$ అయ్యే విధంగా ధన పూర్ణ సంఖ్యలు a మరియు b ల జతకు అనుగుణంగా q మరియు r లు ఏకైక పూర్ణ సంఖ్యలు వ్యవస్థితమవుతాయి" అని మనకు తెలుసు.

ఆలోచించి - చర్చించండి

$a = bq + r$ లో $r = 0$ అయిన a, b మరియు q మధ్య సంబంధమేమిటి?

పైన మీరు జరిపిన చర్చలో 'a' అనేది 'b' చే నిశ్శేషంగా భాగించబడితే 'b' ని 'a' కు కారణాంకం అంటామని తెలుసుకొని ఉంటారు.

ఉదాహరణకు $24 = 2 \times 12$

$24 = 8 \times 3$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 3$

$24 = 2 \times 12$ అయితే 2 మరియు 12 లను 24 యొక్క కారణాంకాలు అంటాం. ఇంకా ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధ రూపంలో దీనిని

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ గా కూడా రాయవచ్చని మనకు తెలుసు.

కొన్ని ప్రధాన సంఖ్యలు 2, 3, 7, 11 మరియు 23 లను తీసుకుందాం. వీటిలో కొన్నింటిని లేదా అన్నింటిని తీసుకొని ఏ సంఖ్య ఎన్నిసార్లు అయిననూ గుణించడం ద్వారా మనం అతిపెద్ద పూర్ణసంఖ్యలను అపరిమితంగా రాబట్టవచ్చు. వీటిలో మనం కొన్నింటిని పరిశీలిద్దాం.

$2 \times 3 \times 11 = 66$ $7 \times 11 = 77$

$7 \times 11 \times 23 = 1771$ $3 \times 7 \times 11 \times 23 = 5313$

$2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 10626$ $2^3 \times 3 \times 7^3 = 8232$

$2^2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 21252$

ఇక అన్ని ప్రధాన సంఖ్యల సమూహాన్ని ఊహించండి. వీటి నుండి ఏవైనా రెండు లేదా మూడు ప్రధాన సంఖ్యలను తీసుకోండి. వాటి లబ్ధాన్ని కనుక్కుంటే, మళ్ళీ ప్రధాన సంఖ్య వస్తుందా? లేదా సంయుక్త సంఖ్య వస్తుందా? అందుచే మనం అన్ని ప్రధానసంఖ్యలను విభిన్న రీతులలో గుణిస్తూ పోతే మనకు అపరిమితంగా విభిన్న సంయుక్త సంఖ్యలు కూడా వస్తాయి. ఇప్పుడు పై ప్రవచనపు విపర్యయం ఏ సంయుక్తనైనా ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంగా రాయగలమని తీసుకుందాం. దిగువ సిద్ధాంతం మన ప్రశ్నకు సమాధానాన్ని చూపుతుంది.

సిద్ధాంతము-1.2 : అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతము (Fundamental Theorem of Arithmetic) : ప్రతి సంయుక్త సంఖ్యను ప్రధానాంకముల లబ్ధంగా రాయవచ్చు. ఇంకా ప్రధాన కారణాంకాల క్రమానికి ప్రాధాన్యత లేనపుడు కారణాంకాల లబ్ధం ఏకైకము.

ఈ చర్చ ద్వారా మనము అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతాన్ని "ప్రతి సంయుక్త సంఖ్యను ప్రధాన కారణాంకముల లబ్ధం" గా రాయవచ్చునని చెప్పవచ్చు. దీనిని మరింత స్పష్టంగా చెప్పాలంటే లబ్ధంలోని ప్రధాన సంఖ్యల క్రమం ఏదైనప్పటికీ ప్రతి సంయుక్త సంఖ్యను ప్రధాన కారణాంకముల లబ్ధంగా ఏకైకం (**unique**) గా రాయవచ్చు. ఉదాహరణకు మనము 210 సంఖ్యను కారణాంకములుగా రాసేటప్పుడు ప్రధానాంకాల క్రమము ఏదైనప్పటికీ దీనిని $2 \times 3 \times 5 \times 7$ లేదా $3 \times 5 \times 7 \times 2$ లేదా మరేవిధంగానైననూ క్రమాన్ని మాత్రమే మార్పిడి చేసి లబ్ధముగా రాయవచ్చును. అందుచే ఏ సంయుక్త సంఖ్యనైనా ప్రధాన కారణాంకముల లబ్ధముగా **ఒకేఒక** విధంగా రాయవచ్చు. దీనిని మనం సిద్ధాంతంగా నిర్వచిద్దాము.

ఒక సంయుక్త సంఖ్య x ను $x = p_1 . p_2 . p_3 .....p_n$ అని రాయవచ్చు. దీనిలో $p_1, p_2, p_3 ...., p_n$ అనేవి ఆరోహణ క్రమంలో రాయబడిన ప్రధానాంకాలు, అంటే $p_1 \leq p_2 \leq ... \leq p_n$. ఈ సందర్భంలో ఒకే రకమైన ప్రధానాంకాలు వాడితే వాటిని ప్రధానాంకాల ఘాతాలుగా రాస్తాము.

ఉదాహరణకు $27300 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 13 = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7 \times 13$

ఇవి చేయండి

2310 ను ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంగా రాయండి. ఈ సంఖ్యను నీ స్నేహితులు ఏవిధంగా కారణాంకాల లబ్ధంగా రాసారో చూడండి. నీవు చేసినట్లుగానే వారు కూడా చేసారా ? చివరి ఫలితాన్ని, నీ స్నేహితుల ఫలితంతో సరిచూడుము. దీని కొరకు 3 లేదా 4 సంఖ్యలను తీసుకొని ప్రయత్నించుము. నీవు ఏమి గమనిస్తావు?

ఇక మనం ప్రాథమిక అంకగణిత సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగిద్దాం.

ఉదాహరణ- 3. 4^n రూపంలో ఒక సంఖ్యను తీసుకోండి. n యొక్క ఏ సహజ విలువకైనా 4^n విలువ గల సంఖ్య 'సున్న' అంకెతో అంతమౌతుందో లేదో సరిచూడండి.

సాధన : n ఒక సహజసంఖ్య అయిన 4^n విలువ సున్నతో అంతం కావాలంటే '5' చే నిశ్శేషంగా భాగించబడాలి. అంటే 4^n యొక్క ప్రధాన కారణాంకాల లబ్దంలో 5 ఒక కారణాంకంగా వుండాలి. కాని ఇది సాధ్యం కాదు. ఎందువలన అనగా $4^n = (2)^{2n}$. అందుచే 4^n యొక్క ప్రధానకారణాంకాల లబ్దంలో 5 లేనందున, n యొక్క ఏ విలువకైననూ 4^n విలువ 'సున్న'తో అంతం కాదు.

మనం ఇది వరకు రెండు ధనపూర్ణసంఖ్యలు గ.సా.కా (గరిష్ఠ సామాన్య కారణాంకం) మరియు క.సా.గు (కనిష్ఠ సామాన్య గుణిజం) ను అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతాన్ని మనకు తెలియకుండానే ఉపయోగించాం.

ఈ పద్ధతినే మనము ప్రధానకారణాంకాల పద్ధతి (Prime factorization method) అంటాము. కింది ఉదాహరణ ద్వారా మనము ఈ పద్ధతిని ఒకసారి గుర్తుకు తెచ్చుకుందాము.

ఉదాహరణ-4. 12 మరియు 18 ల యొక్క గ.సా.కా మరియు క.సా.గులను ప్రధాన కారణాంకాల పద్ధతిలో కనుగొనుము

సాధన : మనకు $12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3^1$

$18 = 2 \times 3 \times 3 = 2^1 \times 3^2$ అగును

12, 18 ల గ.సా.కా $= 2^1 \times 3^1 = 6$ **(సంఖ్యల యొక్క సామాన్య ప్రధాన కారణాంకముల కనిష్ఠ ఘాతాల లబ్ధం)**

12, 18 ల క.సా.గు $= 2^2 \times 3^2 = 36$ **(సంఖ్యల యొక్క ప్రధాన కారణాంకములలో ప్రతి దాని గరిష్ఠ ఘాతాల లబ్ధం)**

పై ఉదాహరణ నుండి $6 \times 36 = 12 \times 18$ మీరు ఒక సంబంధము అంటే (12, 18) ల గ.సా.కా $\times$ (12, 18) ల క.సా.గు $= 12 \times 18$ అయినదని మీరు గమనించే వుంటారు. అనగా రెండు ధనపూర్ణసంఖ్యలు a మరియు b లు అయినచో, వాటి గ.సా.కా $(a, b) \times$ క.సా.గు $[a, b] = a \times b$ అవుతుందని సరిచూడవచ్చును. దీనిని బట్టి రెండు ధనపూర్ణసంఖ్యలు, వాటి గ.సా.కా తెలిసినప్పుడు ఆ సంఖ్యల క.సా.గును ఈ సంబంధం ఆధారంగా కనుగొనవచ్చు.

ఇవి చేయండి

ఇవ్వబడిన సంఖ్యల జతల యొక్క క.సా.గు మరియు గ.సా.కా లను ప్రధాన కారణాంక పద్ధతి ఆధారంగా కనుగొనండి.

(i) 120, 90 (ii) 50, 60 (iii) 37, 49

ప్రయత్నించండి

'n' మరియు 'm' లు ఏవేని సహజ సంఖ్యలకు $3^n \times 4^m$ యొక్క ఫలిత సంఖ్య 0 లేదా 5 తో అంతం అవుతుందా? మీ సమాధానాన్ని సమర్థించండి.

అభ్యాసము - 1.2

1. కింది వానిని ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంగా రాయండి.

   (i) 140 (ii) 156 (iii) 3825 (iv) 5005 (v) 7429

2. కింది పూర్ణసంఖ్యల యొక్క క.సా.గు మరియు గ.సా.కా లను ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధపద్ధతిలో కనుగొనండి.

   (i) 12, 15 మరియు 21 (ii) 17, 23 మరియు 29 (iii) 8, 9 మరియు 25

   (iv) 72 మరియు 108 (v) 306 మరియు 657

3. n ఒక సహజ సంఖ్య అయిన 6^n సంఖ్య 'సున్న'తో అంతమగునా? కాదా? సరిచూడండి.

4. $7 \times 11 \times 13 + 13$ మరియు $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$ లు ఏవిధంగా సంయుక్త సంఖ్యలగునో వివరించండి.

5. $(17 \times 11 \times 2) + (17 \times 11 \times 5)$ అనేది ఒక సంయుక్త సంఖ్య అని ఏవిధంగా నిరూపిస్తావు? వివరించండి.

6. 6^{100} యొక్క ఫలిత సంఖ్యలో ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె ఏది?

వాస్తవ సంఖ్యలను గురించి మరింతగా పరిశోధించడానికి అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతను వినియోగిద్దాం. మొదట అకరణీయ సంఖ్యలను అంతంగల దశాంశాలుగాను, అంతం లేని ఆవర్తన దశాంశ రూపంలో రాయునపుడు ఈ సిద్ధాంతం ఏవిధంగా ఉపయోగపడుతుందో తెలుసుకుందాం. ఇదేవిధంగా $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ మరియు $\sqrt{5}$ మొదలగు సంఖ్యలు కరణీయ సంఖ్యలని ఏవిధంగా నిరూపించవచ్చునో పరిశీలిద్దాం.

1.2.1 అకరణీయ సంఖ్యలు మరియు వాటి దశాంశ రూపాలు

ఇప్పటివరకు మనం పూర్ణ సంఖ్యలు వాటి ధర్మాలలో కొన్నింటిని చర్చించాం కదా! ఇవ్వబడిన పూర్ణసంఖ్యకు ముందు, తరవాత గల పూర్ణసంఖ్యలను ఎలా నిర్ణయిస్తాం? ఒక పూర్ణ సంఖ్యకు మరియు దాని ముందు లేదా తరువాత పూర్ణ సంఖ్యకు మధ్య భేదం 1 అని మీరు గుర్తుచేసుకొని ఉంటారు. ఈ ధర్మం ఆధారంగానే కావలసిన సంఖ్యలను నిర్ణయించి ఉంటారు.

అకరణీయ సంఖ్యలు అంతమయ్యే దశాంశ రూపాలు లేదా అంతంకాని ఆవర్తనమయ్యే దశాంశ రూపాలలో ఉంటాయని మీరు 9వ తరగతిలోనే నేర్చుకున్నారు. ఇప్పుడు ఒక అకరణీయసంఖ్య $(\frac{p}{q}, q \neq 0)$ అనేది ఎప్పుడు అంతమయ్యే దశాంశ రూపంలో ఉంటుందో ఎప్పుడు అంతంకాని ఆవర్తనమయ్యే రూపంలో ఉంటుందో కింది ఉదాహరణలు పరిశీలించి తెలుసుకుందాం.

కింద కొన్ని అంతమయ్యే దశాంశ రూపాలను పరిశీలిద్దాం.

(i) 0.375 (ii) 1.04 (iii) 0.0875 (iv) 12.5

ఇప్పుడు పై సంఖ్యలను $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాద్దాం.

(i) $0.375 = \frac{375}{1000} = \frac{375}{10^3}$ (ii) $1.04 = \frac{104}{100} = \frac{104}{10^2}$

(iii) $0.0875 = \frac{875}{10000} = \frac{875}{10^4}$ (iv) $12.5 = \frac{125}{10} = \frac{125}{10^1}$

మనం తీసుకున్న అంతమయ్యే దశాంశాలను $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయునపుడు హారంలోని q 10 భూమిగా గల ఘాత రూపంలో వ్యక్తం చేయబడ్డాయి. ఇప్పుడు లవ, హారాలను ప్రధాన కారణాంకముల లబ్దంగా రాసి, వాటిని సూక్ష్మరూపంలో రాద్దాం.

(i) $0.375 = \frac{375}{10^3} = \frac{3 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{3}{2^3} = \frac{3}{8}$

(ii) $1.04 = \frac{104}{10^2} = \frac{2^3 \times 13}{2^2 \times 5^2} = \frac{26}{5^2} = \frac{26}{25}$

(iii) $0.0875 = \frac{875}{10^4} = \frac{5^3 \times 7}{2^4 \times 5^4} = \frac{7}{2^4 \times 5} = \frac{7}{80}$

(iv) $12.5 = \frac{125}{10} = \frac{5^3}{2 \times 5} = \frac{25}{2}$

ఈ అకరణీయ సంఖ్యల హారాలలో ఏదైనా అమరికను మీరు గమనించారా? ఒక దశాంశ సంఖ్యను అకరణీయ సంఖ్యగా సూక్ష్మరూపంలో వ్యక్తపరచునపుడు (p, q లు సాపేక్ష ప్రధానాంకాలు) మరియు హారం (అనగా q) యొక్క కారణాంకాలు 2 లేదా 5 లేదా రెండింటి యొక్క ఘాతాలలో రాయునపుడు ఈ అమరికను పరిశీలించవచ్చును. ఎందువలన అనగా 10 యొక్క ఘాతాలలో గల సంఖ్య యొక్క ప్రధానకారణాంకాలు 2 లేదా 5 మరియు రెండింటి ఘాతాలుగా మాత్రమే ఉంటాయి.

ఈ ప్రక్రియలో అకరణీయ సంఖ్యల హారాలను గురించి ఏమి చెప్పగలరు ?

మనం దీనిని కింది విధంగా ముగిద్దాం.

మనం దీనికి సంబంధించి కొన్ని ఉదాహరణలను మాత్రమే పరిశీలించినప్పటికీ ఏ అకరణీయ సంఖ్య యొక్క దశాంశ రూపమైనా అంతమొందే దశాంశం అయినపుడు ఆ అకరణీయ సంఖ్య యొక్క హారాన్ని 10 యొక్క ఘాతాలలో గల సంఖ్యగా రాయవచ్చును. 10 కేవలం ప్రధాన కారణాంకములు 2 మరియు 5 ల లబ్దం మాత్రమే. కావున ఒక అకరణీయ సంఖ్యను $\frac{p}{q}$ రూపంలో మార్చినపుడు q యొక్క ప్రధానకారణాంకాల లబ్దం $2^n\ 5^m$ రూపంలో వుంటుంది, ఇందులో n మరియు m లు ఏవైనా రెండు ఋణేతర పూర్ణ సంఖ్యలు.

ఈ ఫలితాన్ని మనం సిద్ధాంత రూపంలో కింది విధంగా ప్రవచించవచ్చు.

సిద్ధాంతం-1.3 : **x అనేది ఒక అకరణీయ సంఖ్య మరియు దీని దశాంశరూపం ఒక అంతమయ్యే దశాంశము అయినప్పుడు x ను p, qలు పరస్పర ప్రధానాంకాలుగా గల $\frac{p}{q}$ రూపంలో వ్యక్తపరచవచ్చు. మరియు q యొక్క ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధం 2^n5^m అగును. ఇందులో n, m లు అనేవి ఋణేతర పూర్ణసంఖ్యలు.**

ఇవి చేయండి

కింది అంతమొందే దశాంశ సంఖ్యలను అకరణీయ సంఖ్యలుగా $\frac{p}{q}$, ($q \neq 0$ మరియు p, q లు సాపేక్ష ప్రధానాంకాలు) రూపంలలో రాయండి.

(i) 15.265 (ii) 0.1255 (iii) 0.4 (iv) 23.34 (v) 1215.8

మరి దీని యొక్క విపర్యయము మనం పరిశీలిస్తే మనకు ఒకింత ఆశ్చర్యం కలుగక మానదు. అంటే $\frac{p}{q}$ రూపంలో ఒక అకరణీయ సంఖ్యయుండి, q యొక్క రూపం 2^n5^m (ఇందు n, m లు ఋణేతర పూర్ణసంఖ్యలు) కలిగివున్న $\frac{p}{q}$ ఒక అంతమయ్యే దశాంశం అవుతుందా?

దీని నుండి మనం $\frac{p}{q}$ రూపంలో ఒక అకరణీయ సంఖ్య వుండి, q అనేది 2^n5^m రూపంలో వుంటే దానికి తుల్యమైన ఒక అకరణీయ సంఖ్య $\frac{a}{b}$ ఉంటుంది. ఇందులో b అనేది 10 యొక్క ఘాత సంఖ్యగా భావించండి.

దీనిని పరిశీలించడానికి మనం ముందు ఉదాహరణను తిరిగి మరొకసారి పరిశీలించి, వాని విపర్యయములను అవగాహన చేసుకుందాం.

(i) $\frac{3}{8} = \frac{3}{2^3} = \frac{3 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{375}{10^3} = 0.375$

(ii) $\frac{26}{25} = \frac{26}{5^2} = \frac{13 \times 2^3}{2^2 \times 5^2} = \frac{104}{10^2} = 1.04$

(iii) $\frac{7}{80} = \frac{7}{2^4 \times 5} = \frac{7 \times 5^3}{2^4 \times 5^4} = \frac{875}{10^4} = 0.0875$

(iv) $\frac{25}{2} = \frac{5^3}{2 \times 5} = \frac{125}{10} = 12.5$

పై ఉదాహరణలు $\frac{p}{q}$ రూపంలో వుండి దీనిలో q యొక్క రూపం 2^n5^m కలిగిన అకరణీయ సంఖ్యకు ఒక తుల్యమైన అకరణీయ సంఖ్య $\frac{a}{b}$గా ఎలా రాయవచ్చునో తెలుపుతున్నాయి. మరియు ఇందులో b అనేది 10 యొక్క ఒక ఘాత సంఖ్య. అందువలన ఇటువంటి అకరణీయ సంఖ్యలు అంతంగల దశాంశాలుగా రూపొందుతాయి.

అంటే q అనేది 10 యొక్క ఘాతసంఖ్య అయినపుడు $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయగలిగే ఒక అకరణీయ సంఖ్య యొక్క దశాంశరూపం అంతమయ్యే ఒక దశాంశం అవుతుందని స్పష్టం.

అందుచే, సిద్ధాంతం 1.3 యొక్క విపర్యయం కూడా సత్యమే. దీనిని మనం క్రింది విధంగా ప్రవచించవచ్చు.

సిద్ధాంతము 1.4 : n, m లు రుణేతర పూర్ణసంఖ్యలు మరియు q యొక్క ప్రధానకారణాంకాల లబ్ద రూపం 2^n5^m కలిగినటువంటి అకరణీయ సంఖ్య $x = \frac{p}{q}$ అయిన, x యొక్క దశాంశరూపం ఒక అంతమయ్యే దశాంశం (Terminating decimal) అవుతుంది.

ఇవి చేయండి

కింది అకరణీయ సంఖ్యలు $\frac{p}{q}$ రూపంలో వున్నాయి. ఇందులో q ని 2^n5^m రూపంలో (n, m లు ఋణేతర పూర్ణసంఖ్యలు) రాసి వీటిని దశాంశ రూపాలలోనికి మార్చండి.

(i) $\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{7}{25}$ (iii) $\frac{51}{64}$ (iv) $\frac{14}{25}$ (v) $\frac{80}{100}$

1.2.2 అంతంకాని, ఆవర్తనం చెందే దశాంశాలను అకరణీయ సంఖ్యలుగా రాయడం

మనం ఇప్పుడు అంతంకాకుండా, ఆవర్తనం చెందే కొన్ని అకరణీయ సంఖ్యల (non-terminating and recurring), దశాంశ రూపాలను పరిశీలిద్దాం. దీని కొరకు మనం ఒక ఉదాహరణగా $\frac{1}{7}$ యొక్క దశాంశరూపాన్ని చూడండి.

$$\begin{array}{r} 0.1428571 \\ 7\overline{)1.0000000} \\ 7 \\ \hline 30 \\ 28 \\ \hline 20 \\ 14 \\ \hline 60 \\ 56 \\ \hline 40 \\ 35 \\ \hline 50 \\ 49 \\ \hline 10 \\ 7 \\ \hline 30 \end{array}$$

$\frac{1}{7} = 0.1428571428571$ ..... ఇది ఒక అంతంకాని ఆవర్తన దశాంశం. భాగఫలంలో '142857' అంకెల సమూహం ఆవర్తనం చెందడం గమనించండి.

ఈ అకరణీయ సంఖ్యలో హారం 7 కావున, ఇది 2^n5^m రూపంలో రాయలేమని పరిశీలించవచ్చు.

ఇవి చేయండి

కింది అకరణీయ సంఖ్యలను దశాంశాలుగా రాయండి. భాగఫలంలో ఆవర్తనం చెందే అంకెల సమూహాన్ని కనుగొనండి.

(i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{2}{7}$ (iii) $\frac{5}{11}$ (iv) $\frac{10}{13}$

మీరు చేసిన 'ఇవి చేయండి' అభ్యాసం మరియు పైన చూపిన ఉదాహరణ ద్వారా మనం కింది సిద్ధాంతంను ప్రవచించవచ్చు.

సిద్ధాంతము-1.5 : n, m లు రుణేతర పూర్ణసంఖ్యలు మరియు q యొక్క ప్రధానకారణాంకముల లబ్ధం 2^n5^m రూపంలో లేకుంటే, అకరణీయ సంఖ్య $x = \frac{p}{q}$ అయిన x యొక్క దశాంశరూపం ఒక అంతంకాని, ఆవర్తనం చెందే దశాంశం అవుతుంది.

పై చర్చ ద్వారా మనం "ప్రతి అకరణీయ సంఖ్య ఒక అంతమయ్యే దశాంశం" లేదా "అంతం కాని ఆవర్తన దశాంశం" గాని అగునని నిర్ధారించవచ్చును.

ఉదాహరణ-5. చెప్పబడిన సిద్ధాంతాల ఆధారంగా, భాగహారం చేయకుండానే క్రింది అకరణీయ సంఖ్యల దశాంశ రూపాలు ఏవి అంతమయ్యే దశాంశాలో, ఏవి అంతంకాని ఆవర్తన దశాంశాలో తెలపండి.

(i) $\frac{16}{125}$ (ii) $\frac{25}{32}$ (iii) $\frac{100}{81}$ (iv) $\frac{41}{75}$

సాధన :

(i) $\frac{16}{125}=\frac{16}{5\times5\times5}=\frac{16}{5^3}$ (అంతమయ్యే దశాంశ రూపం కలది)

(ii) $\frac{25}{32}=\frac{25}{2\times2\times2\times2\times2}=\frac{25}{2^5}$ (అంతమయ్యే దశాంశ రూపం కలది)

(iii) $\frac{100}{81}=\frac{100}{3\times3\times3\times3}=\frac{10}{3^4}$ (అంతంకాని ఆవర్తన దశాంశ రూపం కలది)

(iv) $\frac{41}{75}=\frac{41}{3\times5\times5}=\frac{41}{3\times5^2}$ (అంతంకాని ఆవర్తన దశాంశ రూపం కలది)

ఉదాహరణ-6. కింది అకరణీయ సంఖ్యలను భాగహారం చేయకుండానే దశాంశరూపంలో రాయండి.

(i) $\frac{35}{50}$ (ii) $\frac{21}{25}$ (iii) $\frac{7}{8}$

సాధన : (i) $\frac{35}{50}=\frac{7\times5}{2\times5\times5}=\frac{7}{2\times5}=\frac{7}{10^1}=0.7$

(ii) $\frac{21}{25}=\frac{21}{5\times5}=\frac{21\times2^2}{5\times5\times2^2}=\frac{21\times4}{5^2\times2^2}=\frac{84}{10^2}=0.84$

(iii) $\frac{7}{8}=\frac{7}{2\times2\times2}=\frac{7}{2^3}=\frac{7\times5^3}{(2^3\times5^3)}=\frac{7\times125}{(2\times5)^3}=\frac{875}{(10)^3}=0.875$

అభ్యాసం- 1.3

1. కింది అకరణీయ సంఖ్యలను దశాంశరూపంలో రాయండి. ఇందులో ఏవి అంతమయ్యే దశాంశాలో, ఏవి అంతంకాని ఆవర్తన దశాంశాలో తెలపండి.

(i) $\frac{3}{8}$ (ii) $\frac{229}{400}$ (iii) $4\frac{1}{5}$ (iv) $\frac{2}{11}$ (v) $\frac{8}{125}$

2. భాగహార ప్రక్రియ లేకుండానే క్రింది అకరణీయ సంఖ్యలలో వేటిని అంతమయ్యే దశాంశాలుగా రాయగలమో/ వేటిని అంతం కాని ఆవర్తన దశాంశాలుగా రాయగలమో తెలపండి.

(i) $\frac{13}{3125}$ (ii) $\frac{11}{12}$ (iii) $\frac{64}{455}$ (iv) $\frac{15}{1600}$ (v) $\frac{29}{343}$

(vi) $\frac{23}{2^3 5^2}$ (vii) $\frac{129}{2^2 5^7 7^5}$ (viii) $\frac{9}{15}$ (ix) $\frac{36}{100}$ (x) $\frac{77}{210}$

3. సిద్ధాంతం 1.4ను అనుసరించి భాగించకుండానే కింది అకరణీయసంఖ్యల యొక్క దశాంశరూపాన్ని తెలపండి

(i) $\frac{13}{25}$ (ii) $\frac{15}{16}$ (iii) $\frac{23}{2^3.5^2}$ (iv) $\frac{7218}{3^2.5^2}$ (v) $\frac{143}{110}$

4. కింది కొన్ని వాస్తవసంఖ్యల దశాంశరూపాలు ఇవ్వబడినవి. ప్రతి సందర్భంలోనూ ఇవ్వబడిన సంఖ్య అకరణీయమో కాదో తెలపండి. ఆ సంఖ్య అకరణీయమై వుండి $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయగలిగితే q యొక్క ప్రధాన కారణాంకాలను గూర్చి నీవు ఏమి చెప్పగలవు?

(i) 43.123 (ii) 0.1201201 (iii) $43.\overline{12}$ (iv) $0.\overline{63}$

1.3 కరణీయ సంఖ్యలు - మరిన్ని అంశాలు

9వ తరగతిలో మీకు కరణీయ సంఖ్యలు మరియు వాటి యొక్క కొన్ని ధర్మాలు పరిచయం చేయబడ్డాయి. ఇంకా అవి ఏవిధంగా వ్యవస్థితం అవుతాయి? మరియు కరణీయ, అకరణీయ సంఖ్యలు కలిసి వాస్తవ సంఖ్యలు అవుతాయని కూడా తెలుసుకున్నారు. కరణీయ సంఖ్యలను సంఖ్యారేఖపై ప్రాతినిధ్య పరిచే విధానాన్ని కూడా తెలుసుకున్నారు. కానీ అవి కరణీయ సంఖ్యలు ఏవిధంగా అవుతాయో తెలుసుకోలేదు మరియు నిరూపించలేదు కూడా. ఈ విభాగంలో $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ మరియు $\sqrt{p}$ (p ప్రధాన సంఖ్య) లను కరణీయ సంఖ్యలని మనం నిరూపిస్తాం. దానికోసం మనం అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించుకొంటాం.

p , q లు పూర్ణసంఖ్యలు మరియు $q \neq 0$ అయిన $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయలేనటువంటి వాస్తవ సంఖ్యలను కరణీయ సంఖ్యలు (Q') అంటారని గుర్తుకు తెచ్చుకోండి. మీరు ఇదివరకే తెలుసుకున్న కొన్ని కరణీయ సంఖ్యలను కింద ఉదహరిద్దాం.

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{15}, \pi,$ 0.10110111011110..., మొ॥నవి.

ఈ విభాగంలో మనం అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతంను అనుసరించి కొన్ని వాస్తవ సంఖ్యలను కరణీయ సంఖ్యలుగా నిరూపిద్దాం. అంటే $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ మొ॥నవి. మనం సాధారణంగా p ఒక ప్రధాన సంఖ్య అయిన $\sqrt{p}$ ఒక కరణీయ సంఖ్య అని చెప్పవచ్చు.

$\sqrt{2}$ ను మనం కరణీయ సంఖ్యగా నిరూపించుటకు ముందుగా అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతం ఆధారిత సిద్ధాంతాన్ని గురించి తెలుసుకుందాం.

సిద్ధాంతము-1.6 : p అనేది ఒక ప్రధాన సంఖ్య మరియు a ఒక ధనపూర్ణ సంఖ్య అయితే "a^2ను p నిశ్శేషంగా భాగిస్తే a ను p నిశ్శేషంగా" భాగిస్తుంది.

నిరూపణ: 'a' అనేది ఒక ధన పూర్ణసంఖ్య అయితే 'a' యొక్క ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంను కింది విధంగా రాయవచ్చు.

$a = p_1p_2 \dots p_n$, ఇందులో $p_1, p_2, \dots, p_n$ లు ప్రధానాంకాలు మరియు వేర్వేరుగా ఉండనవసరం లేదు. అందుచే $a^2 = (p_1p_2 \dots p_n)(p_1p_2 \dots p_n) = p^2_1p^2_2 \dots p^2_n$ అవుతుంది.

a^2 ను p నిశ్శేషంగా భాగించునని ఇవ్వబడినందున, అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతంను అనుసరించి a^2 యొక్క ఒక ప్రధాన కారణాంకం p అవుతుంది. a^2 కి ప్రధాన కారణాంకాలు $p_1, p_2 \dots p_n$ మాత్రమే. కావున p అనేది $p_1, p_2, \dots p_n$ లలో ఒకటిగా వుంటుంది.

ఇప్పుడు p అనేది $p_1 p_2 \dots p_n$, లలో ఒకటిగా నున్నందున, ఇది 'a' ను కూడా నిశ్శేషంగా భాగిస్తుంది.

ఇవి చేయండి

p= 2 , p = 5 మరియు $a^2 = 1, 4, 9, 25, 36, 49, 64$ మరియు 81 అయినపుడు పైన నిరూపించిన ప్రవచనాన్ని ఈ విలువలకు సరిచూడండి.

మనం ఇప్పుడు $\sqrt{2}$ అనేది కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించుటకు ప్రయత్నిద్దాం. ఈ నిరూపణకు విరోధభాసం పద్ధతిని ఉపయోగిద్దాం.

ఉదాహరణ-7. $\sqrt{2}$ ను కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించండి.

నిరూపణ : ఈ నిరూపణ 'విరోధభాసం' ద్వారా చేయుచున్నందున మనం నిరూపించవలసిన ఫలితానికి విరుద్ధంగా $\sqrt{2}$ అనేది ఒక అకరణీయ సంఖ్య అని భావిద్దాం.

$\sqrt{2}$ అకరణీయం అయితే, [r మరియు s అనే రెండు పూర్ణ సంఖ్యలు ($s \neq 0$)] $\sqrt{2} = \frac{r}{s}$ అయ్యేటట్లు వ్యవస్థితం అవుతాయి.

ఒకవేళ r మరియు s లకు 1 కాకుండా ఏదైనా సామాన్య కారణాంకం ఉంటే, వాటి గరిష్ఠ సామాన్య కారణాంకం చేత భాగిస్తే మనకు $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, ఇందులో a మరియు b లు సహ ప్రధానాంకాలు గా రాయవచ్చు.

దీని నుండి $b\sqrt{2} = a$ అవుతుంది.

ఇరువైపులా వర్గం చేసి, క్రమంలో అమర్చగా, మనకు $2b^2 = a^2$ వస్తుంది. అంటే a^2 ను 2 భాగిస్తుంది.

ఇప్పుడు సిద్ధాంతం1.6 ను బట్టి a^2 ను 2 భాగించినందున a ను కూడా 2 భాగిస్తుంది.

అందుచే మనం తిరిగి $a = 2c$, c అనేది ఒక పూర్ణసంఖ్యగా రాయవచ్చు.

ఇందులో 'a' విలువను ప్రతిక్షేపించగా, మనకు $2b^2 = (2c)^2$ అంటే $b^2 = 2c^2$ వస్తుంది.

అంటే b^2 ను 2 భాగిస్తుంది కాబట్టి b ని 2 భాగిస్తుంది. (సిద్ధాంతం1.6 లో p= 2).

అందువలన a మరియు b లకు 2 ఒక సామాన్య కారణాంకం అయినది.

a, b లు పరస్పర ప్రధానాంకాలు కావున 1 తప్ప వీటికి ఎటువంటి ఉమ్మడి కారణాంకాలు ఉండవు. మనం ప్రతిపాదించిన $\sqrt{2}$ అనేది అకరణీయం అనే భావన విరుద్ధతకు దారి తీస్తుంది. అందుచే $\sqrt{2}$ అనేది కరణీయ సంఖ్యగా నిరూపించబడింది.

సాధారణంగా 'd' అనేది ఒక ధన పూర్ణసంఖ్య అయి వుండి, ఏ ఇతర పూర్ణసంఖ్యకు వర్గం కానిచో $\sqrt{d}$ ని మనం ఒక కరణీయ సంఖ్యగా నిరూపించవచ్చును. ఈ సందర్భంలో $\sqrt{6}, \sqrt{8}, \sqrt{15}\ \sqrt{24}$ మొ॥లగు వాటిని కరణీయ సంఖ్యలుగా చెప్పవచ్చును.

కింది తరగతులలో మనం తెలుసుకున్న విధంగా

- ఒక అకరణీయ, కరణీయ సంఖ్యల మొత్తం లేదా భేదం మరొక కరణీయ సంఖ్య.
- ఒక శూన్యేతర అకరణీయ, కరణీయ సంఖ్యల లబ్దం మరియు భాగఫలం కూడా మరొక కరణీయ సంఖ్య అగును.

మనం కొన్ని ప్రత్యేక సందర్భాలలో వీటిని నిరూపిద్దాం.

ఉదాహరణ-8. $5-\sqrt{3}$ ఒక కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించండి.

సాధన: మనం నిరూపించాల్సిన భావనకు విరుద్ధంగా, $5-\sqrt{3}$ ని ఒక అకరణీయ సంఖ్యగా అనుకోండి.

అంటే $5-\sqrt{3}=\frac{a}{b}$ ఇందులో a , b లు సహ ప్రధానాంకాలు మరియు $b \neq 0$.

కావున $5-\frac{a}{b}=\sqrt{3}$

సమీకరణంను తారుమారు చేస్తే, మనకు $\sqrt{3}=5-\frac{a}{b}$ అని వస్తుంది.

a, b లు పూర్ణ సంఖ్యలు కావున మనకు $5-\frac{a}{b}$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య అవుతుంది. కావున $\sqrt{3}$ కూడా అకరణీయ సంఖ్యయే అగును. ఇది అసత్యం.

ఎందుకంటే $\sqrt{3}$ అనేది ఒక కరణీయ సంఖ్య.

ఈ భావన ఏర్పడడానికి, మనం ఊహించిన ప్రతిపాదన $5-\sqrt{3}$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య అనే భావన కావడం. అంటే ఇది ఒక విరోధాభాసం.

కావున $5-\sqrt{3}$ అనేది కరణీయ సంఖ్య అని మనం చెప్పవచ్చును.

ఉదాహరణ-9. $3\sqrt{2}$ అనేది ఒక కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించండి.

సాధన : మనం నిరూపించవలసిన భావనకు విరుద్ధంగా $3\sqrt{2}$ అనేది ఒక అకరణీయసంఖ్యగా ఊహించండి.

a, bలు పరస్పర ప్రధాన సంఖ్యలు మరియు $b \neq 0$ అయ్యేటట్లు $3\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ అవుతుంది.

క్రమంలో అమర్చగా, మనకు $\sqrt{2}=\frac{a}{3b}$ అని వస్తుంది.

ఇందులో $3, a$ మరియు b లు పూర్ణసంఖ్యలు కావున $\frac{a}{3b}$ అనేది ఒక అకరణీయ సంఖ్య అందుచే $\sqrt{2}$ కూడా ఒక అకరణీయ సంఖ్య అవుతుంది. ఇది అసత్యం.

ఎందుకంటే $\sqrt{2}$ ఒక కరణీయ సంఖ్య అనే సత్యానికి విరుద్ధభావన అందుచే ఇది ఒక విరోధాభాసం.

కావున మనం $3\sqrt{2}$ అనేది కరణీయ సంఖ్య అని చెప్పవచ్చును.

ఉదాహరణ-10 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ అనేది ఒక కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించండి.

సాధన: $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ అనేది ఒక అకరణీయ సంఖ్య అని ఊహించండి.

$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\frac{a}{b}$, ఇందు a, b లు పూర్ణసంఖ్యలు మరియు $b \neq 0$ అని తీసుకొండి.

కావున, $\sqrt{2}=\frac{a}{b}-\sqrt{3}$ అగును.

ఇరువైపులా వర్గం చేయగా, మనకు

$$2 = \frac{a^2}{b^2} + 3 - 2\frac{a}{b}\sqrt{3}$$ అని స్పష్టం.

క్రమంగా అమర్చగా

$$\frac{2a}{b}\sqrt{3} = \frac{a^2}{b^2} + 3 - 2$$
$$= \frac{a^2}{b^2} + 1$$

అంటే $\sqrt{3} = \dfrac{a^2 + b^2}{2ab}$

a, b లు పూర్ణసంఖ్యలు కావున, $\dfrac{a^2 + b^2}{2ab}$ అనేది ఒక అకరణీయ సంఖ్య కాబట్టి $\sqrt{3}$ కూడా ఒక అకరణీయ సంఖ్య అవుతుంది. ఇది అసత్యం. ఎందుకంటే $\sqrt{3}$ అనేది ఒక కరణీయ సంఖ్య అనే సత్యానికి విరుద్ధభావన. ఇది ఒక విరోధాభాసం. కావున $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ అనేది ఒక కరణీయసంఖ్య అవుతుంది.

గమనిక :

1. రెండు కరణీయ సంఖ్యల మొత్తం ఎల్లప్పుడూ కరణీయసంఖ్య కాకపోవచ్చును.

   a, b లు రెండునూ కరణీయ సంఖ్యలుగా $a = \sqrt{2}$ మరియు $b = -\sqrt{2}$ గా తీసుకుంటే $a + b = 0$ అగును. ఇది ఒక అకరణీయ సంఖ్య.

2. రెండు కరణీయ సంఖ్యల లబ్ధం ఎల్లప్పుడూ కరణీయం కాకపోవచ్చును.

   ఉదాహరణకు, a, b లు రెండు కరణీయ సంఖ్యలుగా $a = \sqrt{2}$ మరియు $b = 3\sqrt{2}$ గా తీసుకుంటే $ab = 6$, ఇది ఒక అకరణీయ సంఖ్య

అభ్యాసం - 1.4

1. క్రింది వానిని కరణీయసంఖ్యలుగా నిరూపించండి.

   (i) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ (iii) $6 + \sqrt{2}$ (iv) $\sqrt{5}$ (v) $3 + 2\sqrt{5}$

2. p, q లు ప్రధానాంకాలు అయితే $\sqrt{p} + \sqrt{q}$ ఒక కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించండి.

1.4 ఘాతాల పునర్విమర్శ

a^n అనగా "a" అనే సంఖ్య n సార్లు కారాణాంకములుగా కలిగియున్న లబ్ధం అని మనకు తెలుసుకదా! a^n ను a యొక్క nవ ఘాతం అని అంటారు.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots\cdots a}_{n \text{ కారాణాంకములు}}$$

2 యొక్క ఘాతాలు $2^0,\ 2^1,\ 2^2,\ 2^3$ .... లు

3 యొక్క ఘాతాలు $3^0,\ 3^1,\ 3^2,\ 3^3$ .... లు అని గమనించవచ్చును.

మనం గతంలో చర్చించిన విధంగా 81 అనే సంఖ్యను 3^4 రూపంలో సూచించవచ్చును గదా!

$$81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$$

$81 = 3^4$ లో 81 ని భూమి 3 యొక్క 4వ ఘాతం అని అంటారు. 3^4 ను "ఘాతాంక రూపం" అని అంటారు.

ఒకసారి మనం ఘాతాంక న్యాయాలను జ్ఞప్తికి తెచ్చుకొందాము

a, b లు వాస్తవ సంఖ్యలు, $a \neq 0, b \neq 0$ మరియు m, n లు పూర్ణ సంఖ్యలు అయితే

(i) $a^m . a^n = a^{m+n}$; (ii) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (iii) $(ab)^m = a^m . a^m$ (iv) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$

(v) $(a^m)^n = a^{m.n}$ (vi) $a^0 = 1$ (vii) $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$

ఇవి చేయండి

1) క్రింది వాటిని గణించండి.

(i) 2^1 (ii) $(4.73)^0$ (iii) 0^3 (iv) $(-1)^4$ (v) $(0.25)^{-1}$ (vi) $\left(\dfrac{5}{4}\right)^2$ (vii) $\left(1\dfrac{1}{4}\right)^2$

2) (a) 10, 100, 1000, 10000, 100000 లను ఘాతరూపంలో వ్యక్తపరచండి.

(b) i) 16×64 ii) 25×125 iii) $128 \div 32$ లను కనిష్ట ఘాతరూపంలో వ్యక్తపరచండి.

1.4.1 ఘాతములు మరియు సంవర్గమానాలు

ఈ క్రింది వాటిని గమనించండి.

$2^x = 4 = 2^2$ నుండి $x = 2$ అగును.

$3^y = 81 = 3^4$ నుండి $y = 4$ అగును.

$10^z = 100000 = 10^5$ నుండి $z = 5$ అగును.

ఈ క్రింది వాటిని పరిశీలిద్దాము.

$2^x = 5$, $3^x = 7$, $10^x = 5$

పై వాటిలో x విలువను కనుగొనగలరా! ఒకసారి ఆలోచించండి. వాటి విలువలు ఎంత?

$2^x = 5$ లో 2 యొక్క ఘాతము ఎంత ఉంటే 5 అవుతుంది?

కావున పై సందర్భములో x మరియు 5ల మధ్య ఒక కొత్త సంబంధమును ఏర్పరచవలసిన అవసరం ఉన్నది.

దీని కొరకు సంవర్గమానం అనే సంబంధాన్ని ప్రవేశపెట్టడం జరిగింది.

అదేవిధంగా $2^x = y$ లో x ఏ విలువలకు $y = 5$ అవుతుందో మనకు కావాలి.

$x = 1$ ఐన $y = 2^1 = 2$, $x = 2$ ఐన $y = 2^2 = 4$, $x = 3$ ఐన $y = 2^3 = 8$ లను పరిశీలించడం ద్వారా x విలువ 2 మరియు 3 ల మధ్య ఉంటుందని గమనించవచ్చును.

ఇప్పుడు మనం $y = 2^x$ రేఖాచిత్రంలో x యొక్క ఏ విలువకు $2^x = 5$ అవుతుందో గుర్తిద్దాం.

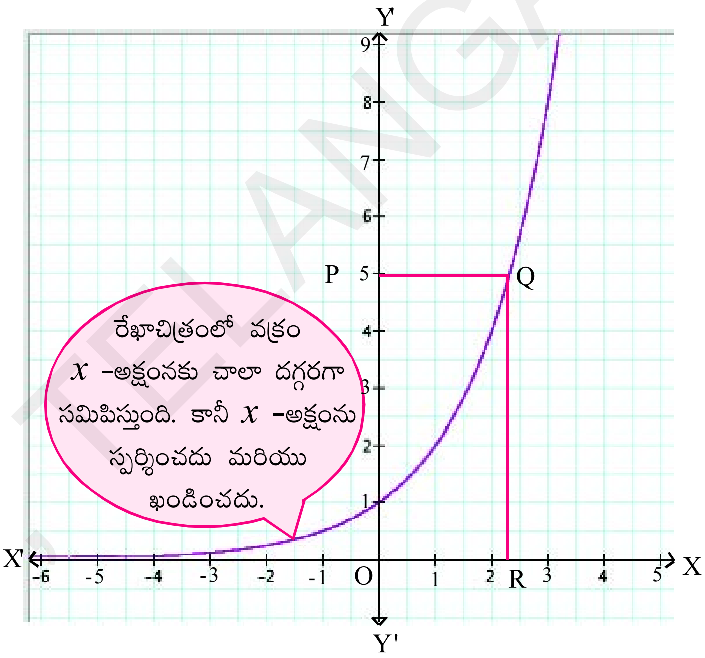
$y = 2^x$ యొక్క రేఖాచిత్రం

$y = 2^x$ యొక్క రేఖా చిత్రమును గీద్దాం. x విలువలను తీసుకొని వాటికి అనురూపంగా y యొక్క విలువలను మనం కనుగొనగలం.

పై x మరియు y విలువలను ఈ క్రింది పట్టిక రూపంలో ప్రదర్శించవచ్చును.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

పై పట్టికలోని x మరియు y విలువల ద్వారా ఏర్పడే బిందువులను గ్రాఫ్‌పై గుర్తించి, వాటిని కలపడం ద్వారా ఒక సరళ వక్రం ఏర్పడుతుందని గమనించవచ్చు.



పై రేఖాచిత్రం ద్వారా మనం ఏమి గమనించవచ్చును? x విలువ పెరిగేకొలది వాటికి అనుగుణంగా $y = 2^x$ యొక్క విలువ పెరుగుతుంది. అదేవిధంగా x విలువ తగ్గినపుడు $y = 2^x$ విలువ కూడ తగ్గి, దాని విలువ 0 కు సమీపిస్తుంది. కాని దాని విలువ 0 కానేరదు అని గమనించవచ్చు.

$y = 2^x$ లో x యొక్క ఏ విలువకు $y = 5$ అవుతుందో ఆలోచిద్దాం.

గ్రాఫులో Y – అక్షం, 2^x యొక్క విలువలను సూచిస్తుంది కదా! మరియు X – అక్షం, x విలువలను సూచిస్తుందని మనం గమనించగలము. ఇప్పుడు Y – అక్షంపై 5 విలువను ఎక్కడ ఉందో గుర్తించి, అచ్చట గల బిందువును P గా గుర్తించండి. P బిందువు నుండి X – అక్షానికి సమాంతరంగా గ్రాఫ్‌ను ఖండించేటట్లు ఒక రేఖను గీయండి. వాటి ఖండన బిందువును Q బిందువుగా గుర్తించండి.

Q బిందువు నుండి X – అక్షముపైకి QR లంబంను గీయండి. గ్రాఫ్‌లో OR యొక్క పొడవును సుమారు విలువ చెప్పగలరు లేదా ఏ విలువల మధ్య ఉంటుందో ఉజ్జాయింపుగా చెప్పగలరా? ఆలోచించండి. రేఖాచిత్రంలో R బిందువు యొక్క x నిరూపకం $2^x = 5$ అగుటకు మనకు కావాల్సిన x యొక్క విలువ అని గమనించవచ్చు.

x యొక్క ఈ విలువనే 2 భూమిగా గల 5 యొక్క సంవర్గమానమని అంటారు. దీనిని $\log_2 5$ గా రాస్తాము.

$2^x = 5$ లేదా $3^x = 7$ లేదా $10^x = 5$ అయినపుడు, x విలువను కనుక్కోవడం కష్టతరమవుతుంది. ఇలాంటి సందర్భంలో 'x' కొరకు ఈ కింది విధంగా సాధనలున్నాయి.

$2^x = 5$ అయితే x విలువ "2 ఆధారంగా 5 యొక్క సంవర్గమానం" అవుతుంది. దీనినే $x = \log_2^5$ గా రాయవచ్చు.

$3^x = 7$ అయితే x విలువ "3 ఆధారంగా 7 యొక్క సంవర్గమానం" అవుతుంది. దీనినే $x = \log_3^7$ గా రాయవచ్చు.

$10^x = 5$ అయితే x విలువ "10 ఆధారంగా 5 యొక్క సంవర్గమానం" అవుతుంది. దీనినే $x = \log_{10}^5$ గా రాయవచ్చు.

సాధారణ రూపంలో $a \neq 1$, a మరియు N లు ధన వాస్తవసంఖ్యలు. $a^x = \mathrm{N}$ అయితే $\log_a \mathrm{N} = x$ అని నిర్వచిస్తాం. ఇచ్చట x ను a భూమికి N యొక్క సంవర్గమానం అని అంటాం.

ఇప్పుడు సూచక భిన్నం X – అక్షంపై (నిష్పత్తి – అనుపాతం అధ్యాయాన్ని చదవండి) ఎంత ఉందో గమనించండి.

10 గడులకు 1 యూనిట్ అయినపుడు
20 గడులకు 2 యూనిట్లు అయినపుడు
40 గడులకు 4 యూనిట్లు అయినపుడు
Y – అక్షంపై 5 అనురూప విలువ X –అక్షంపై ఎంత ఉంటుందో ఊహించండి.

ప్రక్క పేజీలోని పట్టికను ఈ క్రింది విధంగా కూడా తిరిగి ప్రదర్శించవచ్చును గదా! ఒకసారి ఆలోచించండి.

x	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$x = \log_2 y$	-2	-1	0	1	2	3

సంవర్గమాన భావనను దృష్టిలో నుంచుకొని $y = 2^x$ యొక్క గ్రాఫ్ (రేఖాచిత్రం)ను పరిశీలిద్దాం. $y = 2^x$ గ్రాఫ్ నుండి ఈ క్రింది విషయాలను గమనించవచ్చు.

$y = \frac{1}{4}$ అయితే $x = -2$; $2^{-2} = \frac{1}{4}$ అయితే $-2 = \log_2 \frac{1}{4}$

$y = \frac{1}{2}$ అయితే $x = -1$; $2^{-1} = \frac{1}{2}$ అయితే $-1 = \log_2 \frac{1}{2}$

$y = 2$ అయితే $x = 1$; $2^1 = 2$ అయితే $1 = \log_2 2$

$y = 4$ అయితే $x = 2$; $2^2 = 4$ అయితే $2 = \log_2 4$

$y = 8$ అయితే $x = 3$; $2^3 = 8$ అయితే $3 = \log_2 8$

పై పరిశీలనల నుండి మీరు ఏమి గ్రహించారు?

ఇదే విధంగా $10^y = 25$ ఐతే $y = \log_{10} 25$ గా సూచిస్తాం. దీనిని క్లుప్తముగా $y = \log 25$ గా రాయవచ్చు.

10 భూమిగా గల సంవర్గమానములను సాధారణ సంవర్గమానములు అని అంటారు.

ఇవి చేయండి

1) క్రింది వాటిని సంవర్గమాన రూపంలో రాయండి.

(i) $7 = 2^x$ (ii) $10 = 5^b$ (iii) $\frac{1}{81} = 3^c$ (iv) $100 = 10^z$ (v) $\frac{1}{257} = 4^a$

2) క్రింది వాటిని ఘాతరూపంలో వ్యక్తపరచండి.

(i) $\log_{10} 100 = 2$ (ii) $\log_5 25 = 2$ (iii) $\log_2 2 = 1$ (iv) $x = \log_2^9$

ప్రయత్నించండి

1) క్రింది వాటిని సాధించండి

(i) $\log_2 32 = x$ (ii) $\log_5 625 = y$ (iii) $\log_{10} 10000 = z$

ఘాతరూపం మరియు సంవర్గమానంలు ఒక దానినొకటి పరస్పరం విలోములు అవుతాయా? పరిశీలించండి.

$y = 2^x$ రేఖాచిత్రాన్ని సూచించే వక్రంపై గల ప్రతి బిందువు యొక్క y-నిరూపకానికి అనురూపంగా ఏకైక x-నిరూపకం వ్యవస్థితం అవుతుందని గమనించవచ్చు. అందువల్ల ప్రతి ధన వాస్తవసంఖ్యకు ఏకైక సంవర్గమాన విలువ వ్యవస్థితం అవుంతుంది. ఎందుకనగా ప్రతి క్షితిజ సమాంతర రేఖ 2^x రేఖాచిత్రాన్ని ఒకే బిందువు వద్ద ఖండిస్తుంది.

ఆలోచించి – చర్చించండి

1) $\log_2 0$ విలువ వ్యవస్థితం అవుతుందా? కాదా? కారణాలతో వివరించండి.

2) i) $\log_b b = 1$ ii) $\log_b 1 = 0$ iii) $\log_b b^x = x$

iv) $\log_x 16 = 2$ అయితే $x^2 = 16$ మరియు $x = \pm 4$ అవుతుంది. ఈ వాక్యం సత్యమా? అసత్యమా?

సంవర్గమాన ధర్మాలు

పై తరగతులలో అభ్యసించే గణితంలో కాని, సైన్స్, ఇంజనీరింగ్, మొదలగు వాటిలో సంవర్గమానంల యొక్క ఉపయోగం విస్తృతంగా ఉంటుంది. కావున వాటిని ఉపయోగించే వివిధ సందర్భములో అవసరమైన సంవర్గమాన ధర్మాలను గూర్చి ఒకసారి చర్చించుకొందాం.

(i) లబ్ధన్యాయం

ఘాతాంక న్యాయాలకు అనుగుణంగా సంవర్గమాన ధర్మాలు కూడా ఉంటాయని మనం గమనించవచ్చును. ఉదహరణకు ఒకే భూమి కలిగియున్న ఘాతంలను గుణకారం చేయినప్పుడు, వాటి యొక్క ఘాతాంకములను సంకలనం చేసి ఘాతరూపంలో వ్యక్తపరచగలమని తెలుసుగదా!

అనగా $a^x . a^y = a^{x+y}$

పై ఘాతాంక న్యాయంను ఆధారంగా చేసుకొని సంవర్గమాన ధర్మంలోని "లబ్ధ న్యాయం"ను రూపొందించవచ్చును.

సిద్ధాంతం: (లబ్ధ న్యాయం) ***a, x*** **మరియు** ***y*** **లు ధన వాస్తవ సంఖ్యలు,** $\boldsymbol{a \neq 1}$ **అయితే** $\boldsymbol{\log_a xy = \log_a x + \log_a y}$**. రెండు సంఖ్యల లబ్ధం యొక్క సంవర్గమానం, ఆ సంఖ్యల సంవర్గమానంల మొత్తానికి సమానం.**

ఉపపత్తి: $\log_a x = m$ మరియు $\log_a y = n$ అనుకొనుము

అప్పుడు $a^m = x$ మరియు $a^n = y$ అవుతుంది (ఘాత రూపంలో వ్రాయగా)

ఇచ్చట $xy = a^m\, a^n = a^{m+n}$ (దీనిని సంవర్గమాన రూపంలో వ్రాయగా)

$\therefore \quad \log_a xy = m + n = \log_a x + \log_a y$ గా నిరూపించవచ్చును.

ప్రయత్నించండి

$100000 = 1000 \times 100$ గా వ్రాసి లబ్ధ సూత్రంను ఉపయోగించి $\log_{10} 100000 = 5$ అని కనుగొని మీ జవాబును సరిచూడండి.

ఇవి చేయండి

ఈ క్రింది వాటి యొక్క సంవర్గమానంలను, రెండు సంవర్గమానంల మొత్తంగా రాయండి.

(i) 35×46 (ii) 235×437 (iii) 2437×3568

(ii) భాగహార న్యాయం

ఒకే భూమి కలిగిన రెండు ఘాతంలను భాగహారం చేసినట్లయితే ఘాతాంకాలను వ్యవకలనం చేయడం చేసి ఘాతరూపంలో వ్యక్తపరచగలమని తెలుసుకదా!

అంటే $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

పై ఘాతాంక న్యాయంపై "సంవర్గమానం" లోని భాగహార న్యాయం అధారపడి ఉంటుదని మనం గమనించవచ్చును.

సిద్ధాంతం: (భాగహార న్యాయం) ***a, x*** **మరియు** ***y*** **లు ధన వాస్తవ సంఖ్యలు (ఇచ్చట** $\boldsymbol{a \neq 1}$**)**

అయితే $\boldsymbol{\log \dfrac{x}{a^y} = \log_a x - \log_a y}$**.**

నిరూపణ: $\log_a x = m$ మరియు $\log_a y = n$ అనుకున్నట్లయితే, $a^m = x$ మరియు $a^n = y$,

ఇప్పుడు

$$\frac{x}{y} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\therefore \quad \log_a \frac{x}{y} = m - n = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

రెండు సంఖ్యల భాగహారం యొక్క సంవర్గమానం, ఆ సంఖ్యల సంవర్గమానంల బేధానికి సమానం.

ఇవి చేయండి

ఈ క్రింది వాటియొక్క సంవర్గమానంలను, రెండు సంవర్గమానంల భేదంగా రాయండి.

(i) $\frac{23}{34}$ (ii) $\frac{373}{275}$ (iii) $4325 \div 3734$ (iv) $5055 \div 3303$

ఆలోచించి - చర్చించండి

$(a^m)^n = a^{mn}$ అని మనకు తెలుసు.

$a^m = x$ అయితే $m = \log_a^x$

$x^n = a^{mn}$ then $\log_a^{x^n} = mn$

$= n\log_a^x$ (ఎలాగో సమర్థించండి)

(iii) ఘాతన్యాయం

ఒక ఘాత సంఖ్యను, వేరొక ఘాతానికి పెంచితే, మనం వాటిలోని ఘాతాంకములను గుణకారం చేయడం జరుగుతుందని మనకు తెలుసు.

అంటే $(a^m)^n = a^{m.n}$

పై ఘాతాంక న్యాయం ద్వారా సంవర్గమానంలోని "ఘాతన్యాయం"ను తెలుసుకొంటాం.

సిద్ధాంతం: (ఘాత న్యాయం) ***a, x*** **లు ధనవాస్తవ సంఖ్యలు,** $a \neq 0$ **మరియు** ***n*** **ఏదేని వాస్తవసంఖ్య అయితే** $\log_a x^n = n \log_a x$

"ఒక ఘాతసంఖ్య యొక్క సంవర్గమానం ఆ ఘాత సంఖ్య ఘాతాంకమును, ఆ సంవర్గమానంతో గుణించగా వచ్చే లబ్ధానికి సమానం అవుతుంది.

ప్రయత్నించండి

$32 = 2^5$గా వ్రాసి ఘాతన్యాయంను ఉపయోగించి $\log_2 32 = 5$ అని చూపి, జవాబును సరిచూడండి.

$2^x = 3^5$ అయ్యేటట్లు x విలువను కనుగొనగలరా! 3^5 యొక్క విలువ 243 గా కనుగొని, x యొక్క ఏ విలువకు 2^x విలువ 243 అవుతుందో కనుగొనవలసిన అవసరం ఉంది.

అదేవిధంగా 3^{25}, 3^{33} మొదలుగు వాటి విలువలున్నప్పుడు సంవర్గమానంలను తీసుకొని $\log_a x^n = n\log_a x$ అనే న్యాయం, సులభతరం చేస్తుంది కదా!

$2^x = 3^5$

సంవర్గమాన రూపంలో రాయగా $\log_2 3^5 = x$

$5 \log_2 3 = x \quad \left(\because \log_a x^n = n \log_a x\right)$

అనగా $\log_2 3$ విలువను కనుగొని 5 తో గుణాకరం చేయగా x విలువ వస్తుందని గమనించవచ్చు.

ఇవి చేయండి

$\log_a x^n = n \log_a x$ అనే న్యాయంను ఉపయోగించి ఈ క్రింది వాటి ఘాతసంఖ్యల సంవర్గమానాలను మార్చి రాయండి.

(i) $\log_2 7^{25}$ (ii) $\log s_5 8^{50}$ (iii) $\log 5^{23}$ (iv) $\log 1024$

గమనిక : ఇచ్చుట $\log x = \log_{10} x$ అని అర్థము

ప్రయత్నించండి

కింది వాటి విలువలను కనుగొనండి.

(i) $\log_2 32$ (ii) $\log_c \sqrt{c}$ (iii) $\log_{10} 0.001$ (iv) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{8}{27}$

ఆలోచించి - చర్చించండి

$7 = 2^x$ అయితే $x = \log_2 7$ అని మనకు తెలుసు. అయితే $2^{\log_2 7}$ యొక్క విలువ ఎంత? మీ సమాధానాన్ని మరికొన్ని ఉదాహరణలతో సమర్థించండి.

పైదాని నుండి $a^{\log_a N}$ ను ఏ విధంగా సాధారణీకరిస్తారు?

ఉదాహరణ-11. $\log \dfrac{343}{125}$ ను విస్తరించండి.

సాధన :

$$\log \frac{343}{125} = \log 343 - \log 125 \qquad (\because \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y)$$

$$= \log 7^3 - \log 5^3$$

$$= 3\log 7 - 3\log 5 \qquad (\because \log_a x^m = m \log_a x)$$

కావున $\log \dfrac{343}{125} = 3(\log 7 - \log 5)$.

ఉదాహరణ-12. $2\log 3 + 3\log 5 - 5\log 2$ ను ఒకే సంవర్గమానంగా రాయండి.

సాధన : $2\log 3 + 3\log 5 - 5\log 2$

$$= \log 3^2 + \log 5^3 - \log 2^5 \qquad (\because m \log_a x = \log_a x^m)$$

$$= \log 9 + \log 125 - \log 32$$

$$= \log (9 \times 125) - \log 32 \qquad (\because \log_a x + \log_a y = \log_a xy)$$

$$= \log 1125 - \log 32$$

$$= \log \frac{1125}{32} \qquad (\because \log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y})$$

ఉదాహరణ-13. $3^x = 5^{x-2}$ సమీకరణాన్ని సాధించండి.

సాధన : $3^x = 5^{x-2}$

ఇరువైపులా సంవర్గమానాలు తీసుకుంటే

$$\log 3^x = \log 5^{x-2}$$

$$x \log_{10}3 = (x-2)\log_{10}5$$

$$x \log_{10}3 = x\log_{10}5 - 2\log_{10}5$$

$$x\log_{10}5 - 2\log_{10}5 = x\log_{10}3$$

$$x\log_{10}5 - x\log_{10}3 = 2\log_{10}5$$

$$x(\log_{10}5 - \log_{10}3) = 2\log_{10}5$$

$$x = \frac{2\log_{10}5}{\log_{10}5 - \log_{10}3}$$

ఉదాహరణ-14. $2\log 5 + \frac{1}{2}\log 9 - \log 3 = \log x$ అయితే x విలువను కనుగొనండి.

సాధన : $\log x = 2\log 5 + \frac{1}{2}\log 9 - \log 3$

$$= \log 5^2 + \log 9^{\frac{1}{2}} - \log 3$$

$$= \log 25 + \log\sqrt{9} - \log 3$$

$$= \log 25 + \log 3 - \log 3$$

$$\log x = \log 25$$

$$\therefore \quad x = 25$$

అభ్యాసం - 1.5

1. కింది వాటి విలువలను కనుగొనండి.

(i)	$\log_{25}5$	(ii)	$\log_{81}3$	(iii)	$\log_2\left(\frac{1}{16}\right)$
(iv)	$\log_7 1$	(v)	$\log_x\sqrt{x}$	(vi)	$\log_2 512$
(vii)	$\log_{10}0.01$	(viii)	$\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{8}{27}\right)$	(ix)	$2^{2+\log_2 3}$

2. కింది వాటిని ఒకే సంవర్గమాన పదంగా రాసి విలువలను కనుగొనండి.

(i)	$\log 2 + \log 5$	(ii)	$\log_2 16 - \log_2 2$	(iii) $3\log_{64}4$
(iv)	$2\log 3 - 3\log 2$	(v)	$\log 10 + 2\log 3 - \log 2$	

3. $x = \log_2 3$ మరియు $y = \log_2 5$ అని ఇవ్వబడిన, కింది వాటి విలువలను x మరియు y లలో తెలపండి.

   (i) $\log_2 15$ (ii) $\log_2 7.5$ (iii) $\log_2 60$ (iv) $\log_2 6750$

4. కింది వాటిని విస్తరించండి.

   (i) $\log 10000$ (ii) $\log\left(\dfrac{128}{625}\right)$ (iii) $\log x^2y^3z^4$ (iv) $\log\dfrac{p^2q^3}{r^4}$ (v) $\log\sqrt{\dfrac{x^3}{y^2}}$

5. $x^2 + y^2 = 25xy$ అయిన $2\log(x+y) = 3\log 3 + \log x + \log y$ అని నిరూపించండి.

6. $\log\left(\dfrac{x+y}{3}\right) = \dfrac{1}{2}(\log x + \log y)$ అయిన $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$ విలువను కనుగొనండి.

7. $(2.3)^x = (0.23)^y = 1000$ అయిన $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}$ విలువను కనుగొనండి.

8. $2^{x+1} = 3^{1-x}$ అయిన x విలువను కనుగొనండి.

9. (i) $\log 2$ కరణీయ సంఖ్యానా లేదా అకరణీయ సంఖ్యానా? మీ సమాధానాన్ని సమర్థించండి.

   (ii) $\log 100$ కరణీయ సంఖ్యానా లేదా అకరణీయ సంఖ్యానా? మీ సమాధానాన్ని సమర్థించండి.

ఐచ్ఛిక అభ్యాసం
[విస్తృత అధ్యయన కోసం]

1. n ఒక సహజ సంఖ్య అయినపుడు 6^n యొక్క ఒకట్ల స్థానంలో 5 ఉంటుందా? కారణాలు తెలపండి.

2. $7 \times 5 \times 3 \times 2 + 3$ అనేది సంయుక్త సంఖ్య అగునా? నీ జవాబును సమర్థించండి.

3. $\left(2\sqrt{3} + \sqrt{5}\right)$ ఒక కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించండి. ఇదేవిధంగా $\left(2\sqrt{3} + \sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{3} - \sqrt{5}\right)$ అకరణీయమగునో, కరణీయమగునో సరిచూడండి.

4. $x^2 + y^2 = 6xy$ అయిన $2\log(x+y) = \log x + \log y + 3\log 2$ అని చూపండి.

5. $\log_{10} 2 = 0.3010$ అయిన 4^{2013} సంఖ్యలో ఎన్ని అంకెలుంటాయో తెలపండి.

గమనిక : ఒక సంఖ్య సంవర్గమానంలో పూర్ణాంక భాగం గురించి, దశాంశ భాగం గురించి మీ ఉపాధ్యాయుని అడిగి తెలుసుకోండి.

ప్రాజెక్టు పని

యూక్లిడ్ విశేషవిధి – గ.సా.భా

- ఇవ్వబడిన రెండు సంఖ్యల యొక్క గ.సా.భా (H.C.F) ను ప్రయోగాత్మకంగా కనుగొనుట (యూక్లిడ్ విశేషవిధి ప్రకారం రంగు పట్టీ, గ్రాఫ్ పేపర్, గ్రిడ్ పేపర్ ద్వారా)

మనం ఏమి చర్చించాం

1. భాగహార విశేషవిధి : $a = bq + r,\ 0 \le r < b$ అయ్యే విధంగా ధనపూర్ణ సంఖ్యలు a మరియు b ల జతకు అనుగుణంగా q మరియు r లు ఏకైక పూర్ణ సంఖ్యలు వ్యవస్థితం అవుతాయి.

2. అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతం ప్రకారం "ప్రతి సంయుక్త సంఖ్యను ప్రధాన సంఖ్యల కారణాంకాల లబ్ధంగా వ్యక్తపరచవచ్చునని మరియు ప్రధాన కారణాంకాల వరుసక్రమం ఏదైనప్పటికీ ఇది ఏకైకం" అనీ వివరించవచ్చును.

3. p ఒక ప్రధాన సంఖ్య మరియు a ఒక ధనపూర్ణ సంఖ్య అయి వుండి a^2ను p నిశ్శేషంగా భాగిస్తే అప్పుడు a ను p నిశ్శేషంగా భాగిస్తుంది.

4. x ఒక అకరణీయ సంఖ్య మరియు దీని దశాంశ రూపం ఒక అంతమయ్యే దశాంశం అయినపుడు x ను p, q లు సహ ప్రధానాంకాలు అయివున్న $\frac{p}{q}$ రూపంలో వ్యక్తపరచవచ్చును దీనితో p మరియు q లు సహ ప్రధాన సంఖ్యలై q యొక్క ప్రధానకారణాంకాల లబ్ధం 2^n5^m అగును ఇందులో n, m లు రుణేతర పూర్ణసంఖ్యలు.

5. n, m లు రుణేతర పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు q యొక్క ప్రధానకారణాంకాల లబ్ధ రూపం 2^n5^m కలిగినటువంటి అకరణీయ సంఖ్య $x = \frac{p}{q}$ అయిన, x యొక్క దశాంశరూపం ఒక అంతమయ్యే దశాంశం అగును.

6. n, m లు రుణేతర పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు q యొక్క ప్రధాన కారణాంకముల లబ్ధం 2^n5^m రూపంలో లేకుంటే, అకరణీయ సంఖ్య $x = \frac{p}{q}$ అయిన, x యొక్క దశాంశరూపం ఒక అంతంకాని ఆవర్తన దశాంశం అగును.

7. a, x లు ధన పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు $a \neq 1$ అయివుండి $a^n = x$ అయిన మనం $\log_a x = n$ అని నిర్వచిస్తాం.

8. సంవర్గమాన న్యాయాలు

   a, x, y లు ధన వాస్తవ సంఖ్యలు మరియు $a \neq 1$, అయితే

   (i) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ (ii) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

   (iii) $\log_a x^m = m \log_a x$ (iv) $a^{\log_a N} = N$ (v) $\log_a 1 = 0$

   (vi) $\log_a a = 1$

9. సంవర్గమానాలను ముఖ్యంగా ఇంజనీరింగ్, సైన్స్, వ్యాపారం, అర్థశాస్త్రంలలో విరివిగా వినియోగిస్తారు.

అధ్యాయము

2 సమితులు

(Sets)

2.1 పరిచయం

మీరు ఎవరి గూర్చి ఐన చెప్పాల్సివస్తే ఎలా చెప్తుతారు? దిగువ విధంగానా?

రామానుజన్ ప్రముఖ గణిత శాస్త్రవేత్త మరియు అతడు సంఖ్యావాదంపై విశేష కృషి చేసినాడు.

దాశరధి ఒక ప్రముఖ తెలుగు కవి మరియు స్వాతంత్ర్య సమరయోధుడు.

ఆల్బర్ట్ ఐన్‌స్టీన్, జర్మనీలో జన్మించాడు. ఇతడు ప్రముఖ భౌతికశాస్త్రవేత్త. అతడు సంగీతం పట్ల అభిరుచి కలిగినవాడు.

ఫీల్డ్ మెడల్ పొందిన మొట్టమొదటి మహిళా గణితశాస్త్రవేత్త "మార్యం మీర్జాఖాన్".

మొదట గుర్తింపు పొందిన పెద్ద సమూహం (ఒక ప్రత్యేకత ఆధారంగా)కు చెందిన వారుగా ఒక వ్యక్తి గురించి చెప్పిన తర్వాత వారి ప్రత్యేకతలను లేదా ప్రత్యేక అభిరుచులను గూర్చి తెలుపుతాం కదా!

గ్రంథాలయాలను గమనించినట్లయితే అందులోని పుస్తకాలను, విషయాలవారీగా మనకు అవసరమైనప్పుడు సులభంగా తీసుకునే విధంగా అమరుస్తారు.

రసాయనిక శాస్త్రంలోని మూలకాలు ధర్మాలను అధ్యయనం చేయవలెనంటే, వాటి యొక్క సామాన్య ధర్మాలను లేదా ఒకరకమైన పోలికలు దృష్టిలో ఉంచుకొని మూలకాల వర్గీకరణ పట్టికలో పీరియడ్లలో మరియు గ్రూపులలో విభజిస్తారని మనము నేర్చుకొనియున్నాము కదా!

మీ 10వ తరగతి గణిత పాఠ్యపుస్తకంలోని అధ్యాయాలను కూడా ఆయా సంబంధిత శీర్షికల ప్రకారం విభజించడం జరిగింది కదా!

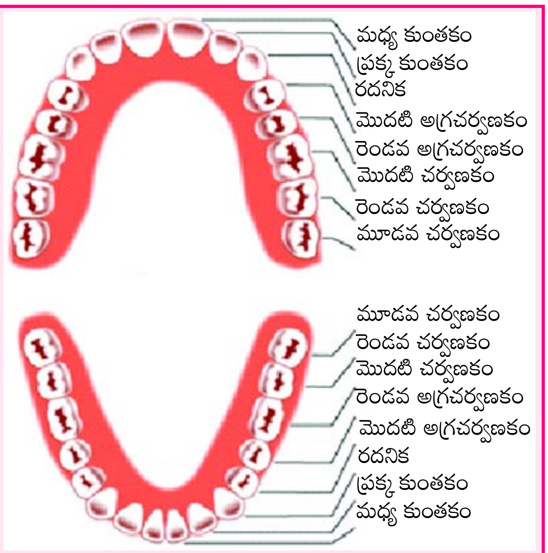
దంత సూత్రము

మానవుని యొక్క దంతాలను అవిచేసే పనుల ఆధారంగా 4 రకాలుగా వర్గీకరించబడతాయని గమనించవచ్చు.

i) కుంతకాలు ii) రదనికలు

iii) అగ్ర చర్వణకాలు iv) చర్వణకాలు

వీటిలో నమిలే విధానం ఆధారంగా కుంతకాలు, రదనికలు, అగ్ర చర్వణకాలు మరియు చర్వణకాలుగా దంతాల సముదాయం విభజించబడింది. వీటిని ఒక క్రమంలో సూచించడాన్ని దంత సూత్రం అంటాం. మానవుని యొక్క దంత సూత్రం వరుసగా 2, 1, 2, 3 అవుతుంది.



గణితంలో కూడా మిగతా శాస్త్రాలకు విభిన్నంగా కాకుండా, సేకరించిన వస్తువులను ఒక అర్థవంతమైన విషయాలవారీగా సమూహములుగా ఏర్పరచవలసిన అవసరం ఉన్నది. దీనిని బట్టి గణితంలో సామాన్య ధర్మాన్ని ప్రదర్శించే వస్తువులన్నింటిని కలిపి ఒకే విధమైన సామాన్య ధర్మం కలిగిన సమూహముగా పరిగణించడం జరుగుతుందని గమనించవచ్చును.

అటువంటి సమూహాలలో, మనకు తరచుగా తటస్థపడే కొన్ని సంఖ్యా సమూహాలను దిగువ పరిశీలిద్దాం.

$\mathbb{N}$ = 1, 2, 3, ... మొదలైన సహజ సంఖ్యా సమూహం

$\mathbb{W}$ = 0, 1, 2, 3, ... అనే పూర్ణాంకాల సమూహం

$\mathbb{I}$ లేదా $\mathbb{Z}$ = 0, $\pm$ 1, ± 2, ± 3, అనే పూర్ణ సంఖ్యల సమూహం

$\mathbb{Q}$ = p, q లు పూర్ణ సంఖ్యలు, $q \neq 0$ అవుతూ, $\dfrac{p}{q}$ రూపంలో రాయగల అకరణీయ సంఖ్యల సమూహం

$\mathbb{R}$ = వాస్తవ సంఖ్యలన్నిటి (దశాంశ రూపంలో రాయగల సంఖ్యలన్నిటి) సమూహం.

ఇవి చేయండి

ఈ కింది సముదాయాలలోని సామాన్య ధర్మాన్ని గుర్తించి రాయండి.

1) 2,4,6,8,… 2) 2,3,5,7,11,… 3) 1,4,9,16,…

4) జనవరి, ఫిబ్రవరి, మార్చి, ఏప్రిల్….

5) బొటనవేలు, చూపుడువేలు, మధ్యవేలు, ఉంగరపు వేలు, చిటికనవేలు.

ఆలోచించి - చర్చించండి

క్రింది సముదాయాలను పరిశీలించి, వాటి ధర్మాలను తెలిపే మరికొన్ని 'సాధారణ ప్రవచనాలను' రాయండి.

1) 2,4,6,8,… 2) 1,4,9,16,…

2.2 సమితి

సమితి అనేది ఒక సునిర్వచిత విభిన్న వస్తువుల సముదాయము. ఒక సమితిలోని వస్తువులను మూలకములు (elements) అంటారు. సమితిలోని మూలకాలను { } బ్రాకెట్లలో రాస్తాము.

ఉదాహరణకు మనం, మొదటి ఐదు ప్రధాన సంఖ్యల సమితిని రాయాలనుకుంటే, దానిని {2, 3, 5, 7, 11} గా రాస్తాము. మరియు కుంతకాల సమితిని రాయాలనుకుంటే {మధ్య కుంతకం, ప్రక్క కుంతకం} అని రాస్తాం.

ఇవి చేయండి

ఈ క్రింది సమితులను రాయండి.

1) మొదటి ఐదు ధనపూర్ణ సంఖ్యల సమితి
2) 100 కంటే ఎక్కువ 125 కంటే తక్కువైన 5 యొక్క గుణిజాల సమితి
3) మొదటి 5 ఘన సంఖ్యల సమితి
4) రామానుజన్ సంఖ్యలోని అంకెల సమితి

2.2.1 సమితి రోస్టర్ రూపం మరియు సమితి నిర్మాణ రూపం (ROSTER FORM AND SET BUILDER FORM)

పెద్ద పెద్ద వాక్యాలతో ఒక సమితిని సూచించడం కష్టమవుతుంది కదా! అందువల్ల సమితులను సాధారణంగా, ఆంగ్ల పెద్ద అక్షరాలు A, B, C, ... లచే సూచిస్తాము.

ఉదాహరణకు, M అనేది చర్వణాకాల సమితి అయితే,

M = {మొదటి చర్వణకం, రెండవ చర్వణకం, మూడవ చర్వణకం} అని రాస్తాం.

మరియొక ఉదాహరణను పరిశీలిద్దాం.

Q అనేది కనీసం రెండు భుజాలు సమానంగా గల చతుర్భుజాల సమితి అయితే

Q = {చతురస్రం, దీర్ఘచతురస్రం, సమచతుర్భుజం, సమాంతర చతుర్భుజం, పతంగి ఆకారం, సమద్విబాహు ట్రెపీజియం} అని రాస్తాం.

పై సందర్భాలలో సమితిలోని మూలకాల జాబితాను రాస్తున్నాం. ఈ విధంగా సమితులను సూచించే రూపాన్ని "రోస్టర్ రూపం" లేదా "జాబితా రూపం" అంటారు.

పై రెండు సందర్భాలలోని సమితులలో ఒక మూలకం ఒకసమితికి చెందడాన్ని చర్చిద్దాం. ఉదాహరణకు "రెండవ చర్వణకం, చర్వణకాల సమితిలో ఉంటుందని చెప్పడానికి రెండవ చర్వణకం ∈ M" అని రాస్తాం. దీనిని "రెండవ చర్వణకం M సమితికి చెందుతుందని చదువుతాం. ఆంగ్లంలో 'రెండవ చర్వణకం belongs to M' అని చదువుతాం.

ఇక "రాంబస్ ∈ Q" అని అనవచ్చా? దీనిని ఏవిధంగా చదువుతారు?

పై ఉదాహరణలలో చతురస్రం M సమితిలో ఉంటుందా? లేకపోయినట్లయితే ఎలా సూచిస్తారు?

"చతురస్రం M సమితిలో లేదు" అని చెప్పడానికి 'చతురస్రం ∉ M' అని రాస్తాం. దీనిని చతురస్రం M సమితికి చెందదు అని చదువుతాం. ఆంగ్లంలో దీన్ని 'చతురస్రం does not belongs to M' అని చదువుతాం.

మీరు ఇంతకు ముందు తరగతులలో చదువుకున్న కొన్ని సంఖ్యాసమితులను గుర్తుకు తెచ్చుకోండి. సహజ సంఖ్యా సమితి $\mathbb{N}$, పూర్ణ సంఖ్యల సమితి $\mathbb{Z}$, అకరణీయ సంఖ్యాసమితి $\mathbb{Q}$ మరియు వాస్తవ సంఖ్యా సమితి $\mathbb{R}$ చే సూచిస్తామని గుర్తుకు తెచ్చుకోండి.

ఇవి చేయండి

ఈ క్రింది సంఖ్యలు ఏ సంఖ్యాసమితికి చెందుతాయో? చెందవో? నిర్ణయించి, సరియైన గుర్తుతో వ్యక్తపరచండి.

(i) 1 (ii) 0 (iii) - 4 (iv) $\frac{5}{6}$ (v) $1.\overline{3}$ (vi) $\sqrt{2}$

(vii) log2 (viii) 0.03 (ix) π (x) $\sqrt{-4}$

ఆలోచించి - చర్చించండి

అకరణీయ సంఖ్యా సమితి($\mathbb{Q}$) ని, దానిలోని మూలకాలచే 'జాబితారూపం'లో సూచించగలరా?

పై అంశానికి సంబంధించి మీరు జరిపిన చర్చలో అకరణీయ సంఖ్యా సమితి ($\mathbb{Q}$) మొత్తాన్ని జాబితా రూపంలో సూచించడం అనేది క్లిష్టమైనదిగా గమనించి ఉంటారు. ఇంకా అకరణీయ సంఖ్యా సమితిలోని అన్ని మూలకాలు $\frac{p}{q}(q \neq 0,\ p,q \in z)$ అని చెప్పడం సులభం మరియు అర్థవంతమైనదని గమనించి ఉంటారు.

ఒక సమితిని దానిలోని మూలకాలను "సామాన్య ధర్మం"తో వ్యక్తపరిస్తే అది "సమితి నిర్మాణ రూపం" (set builder form)లో ఉన్నదని అంటాం. కానీ సమితి నిర్మాణరూపం ఒక పద్ధతిని అనుసరించి రాయాలి.

దీనిని మనం ఒక ఉదాహరణ ద్వారా గమనిద్దాం.

A అనేది 20 కంటే చిన్నవైన 3 యొక్క గుణిజాల సమితి.

దీని యొక్క జాబితా రూపం A={3,6,9,12,15,18} గా రాస్తాం.

దీనిని సమితి నిర్మాణ రూపంలో A={$x : x$ = 3 యొక్క గుణిజం మరియు $x < 20$} అని వ్యక్తపరుస్తాం.

దీనిని x అనే మూలకం 3 యొక్క గుణిజం మరియు 20 కంటే చిన్నది అని చదువుతాం. ఆంగ్లంలో "x :" ను "x such that" అని చదువుతాం.

ఇంతవరకు మీరు చర్చించిన అకరణీయ సంఖ్యా సమితి ($\mathbb{Q}$) ని సమితి నిర్మాణరూపంలో

$\mathbb{Q} = \{x : x = \frac{p}{q},\ q \neq 0,\ p,q \in z\}$ అని వ్యక్తపరుస్తాం.

గమనిక: (i) రామానుజన్ సంఖ్యలోని అంకెల సమితిని రాయగా అది {1, 7, 2, 9} సమితి అవుతుంది. దీనిని గమనిస్తే ఒక సమితిలోని మూలకాల క్రమానికి ఒక ప్రాధాన్యత లేదని అర్థమౌతుంది.

(ii) ఒక సమితిలోని మూలకాలు పునరావృతం కాకూడదు. ఉదాహరణకు "SCHOOL" అనే పదంలోని అక్షరాల సమితిని రాయాలనుకొంటే దానిని {S,C,H,O,L} గా రాయాలి. కానీ {S,C,H,O,O,L} గా రాయకూడదు. ఎందుకంటే సమితి అనేది విభిన్న మూలకాల సముదాయం.

ఈ కింద ఇవ్వబడిన కొన్ని సమితులకు వాటి యొక్క జాబితా రూపాలు మరియు సమితి నిర్మాణ రూపాలను గమనిద్దాం.

జాబితా రూపం (రోస్టర్ రూపం)	సమితి నిర్మాణ రూపం
$V = \{a, e, i, o, u\}$	$V = \{x : x$ అనేది ఆంగ్ల భాషలోని అచ్చు$\}$
$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$	$A = \{x : x -2 \leq x \leq 2, x \in \mathbb{Z}\}$
$B = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right\}$	$B = \left\{x : x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, n \leq 5\right\}$
$C = \{2, 5, 10, 17\}$	$C = \{x : x = n^2 + 1, n \in \mathbb{N}, n \leq 4\}$

ఇవి చేయండి

1. క్రింది సమితులలోని మూలకాల జాబితాను రాయండి.
   (i) G అనేది 20 కు గల అన్ని కారణాంకాలు కలిగిన సమితి.
   (ii) F అనేది 17 మరియు 61 మధ్యగల 4 యొక్క గుణిజాలు మరియు 7 చే భాగించబడే మూలకాల సమితి
   (iii) $S = \{x : x$ అనేది 'MADAM' అనే పదంలో గల అక్షరాల సమితి$\}$
   (iv) $P = \{x : x$ అనేది 3.5 మరియు 6.7 మధ్యగల పూర్ణాంకాల సమితి$\}$
2. క్రింది సమితులను రోస్టర్ రూపంలో రాయండి.
   (i) B అనేది ఒక సంవత్సరంలో ఒక నెలకి 30 రోజులుగా గల అన్ని నెలల సమితి.
   (ii) P అనేది 10 కంటే తక్కువైన అన్ని ప్రధాన సంఖ్యల సమితి.
   (iii) X అనేది ఇంద్రధనస్సులో గల అన్ని రంగుల సమితి
3. A అనేది 12కు కారణాలుగా గల సమితి. ఈ క్రింది వానిలో ఏ సంఖ్య 'A' సమితికి చెందుతుందో గుర్తును ఉపయోగించి సూచించండి.
   (A) 1 (B) 4 (C) 5 (D) 12

ప్రయత్నించండి

1. బీజగణిత మరియు రేఖాగణిత భావనలతో కొన్ని సమితులను ఏర్పరచండి.
2. రోస్టర్ రూపంతో, సమితి నిర్మాణ రూపంను జతపరచండి.

(i)	{p, r, i, n, c, a, l}	(a) $\{x : x$ ఒక ధన పూర్ణ సంఖ్య మరియు 18ను భాగించునది$\}$
(ii)	{0}	(b) $\{x : x$ ఒక పూర్ణసంఖ్య మరియు $x^2 - 6x + 9 = 0\}$
(iii)	{1, 2, 3, 6, 9, 18}	(c) $\{x : x$ ఒక పూర్ణసంఖ్య మరియు $x + 1 = 1\}$
(iv)	{3}	(d) $\{x : x$ అనేది PRINCIPAL అనే పదంలో ఉన్న అక్షరం$\}$

అభ్యాసం - 2.1

1. క్రింది వాటిలో ఏవి సమితులు? మీ సమాధానాన్ని సహేతుకంగా సమర్థించండి.
   (i) "J" అనే అక్షరంతో ప్రారంభమయ్యే ఒక సంవత్సరంలో గల అన్ని నెలల సమూహాలు.
   (ii) భారతదేశంలో గల అత్యంత ప్రతిభావంతులైన 10 మంది రచయితల సమూహం.
   (iii) ప్రపంచంలో గల 11 మంది బాగా క్రికెట్ ఆడేటటువంటి "బ్యాట్స్‌మెన్"ల టీమ్.
   (iv) నీ తరగతిలో గల అందరు బాలుర సముదాయం
   (v) అన్ని సరి పూర్ణ సంఖ్యల సముదాయం

2. $A=\{0, 2, 4, 6\}$, $B = \{3, 5, 7\}$, $C = \{p, q, r\}$ అయిన క్రింది ఖాళీలలో $\in$ లేదా $\notin$ సరైన గుర్తును పూరించండి.
   (i) 0 ….. A (ii) 3 ….. C (iii) 4 ….. B
   (iv) 8 ….. A (v) p ….. C (vi) 7 ….. B

3. క్రింది వాక్యాలను గుర్తులనుపయోగించి వ్యక్తపరచండి.
   (i) 'x' అనే మూలకం 'A'కు చెందదు.
   (ii) 'd' అనేది 'B' సమితి యొక్క ఒక మూలకం.
   (iii) '1' అనేది సహజ సంఖ్యాసమితికి చెందుతుంది.
   (iv) '8' అనేది P అనే ప్రధాన సంఖ్యల సమితికి చెందదు.

4. క్రింది వాక్యాలు సత్యమా? అసత్యమా? తెలపండి.
   (i) $5 \notin$ ప్రధానసంఖ్యల సమితి.
   (ii) $S = \{5, 6, 7\} \Rightarrow 8 \in S$.
   (iii) $-5 \notin W$, 'W' సమితి పూర్ణాంకాల సమితి.
   (iv) $\frac{8}{11} \in Z$, 'Z' అనేది పూర్ణసంఖ్యల సమితి.

5. క్రింది సమితులను రోస్టర్ రూపంలో రాయండి.
   (i) $B = \{x : x$ అనేది 6 కంటే తక్కువైన సహజసంఖ్య$\}$
   (ii) $C = \{x : x$ అనేది ఒక రెండంకెల సహజసంఖ్య మరియు దాని రెండంకెల మొత్తం 8$\}$.
   (iii) $D = \{x : x$ అనేది 60ని భాగించగల ఒక ప్రధానసంఖ్య$\}$.
   (iv) $E = \{x : x$ అనేది BETTER అనే పదంలోని ఒక అక్షరం$\}$.

6. క్రింది సమితులను సమితి నిర్మాణ రూపంలో రాయండి.
   (i) $\{3, 6, 9, 12\}$ (ii) $\{2, 4, 8, 16, 32\}$
   (iii) $\{5, 25, 125, 625\}$ (iv) $\{1, 4, 9, 16, 25, \ldots.. 100\}$

7. క్రింది సమితులను రోస్టర్ రూపంలో రాయండి.
   (i) $A = \{x : x$ అనేది 50 కంటే ఎక్కువ, 100 కంటే తక్కువ అయిన సహజసంఖ్య$\}$
   (ii) $B = \{x : x$ ఒక పూర్ణసంఖ్య మరియు $x^2 = 4\}$
   (iii) $D = \{x : x$ అనేది "LOYAL" అనే పదంలోని ఒక అక్షరం$\}$
   (iv) $E = \{x : x = 2n2 + 1, -3 \le n \le 3, n \in \mathbb{Z}\}$

8. రోస్టర్ రూపం నుండి సమితినిర్మాణరూపానికి జతపరచండి.

(i)	$\{1, 2, 3, 6\}$	(a)	$\{x : x$ అనేది ప్రధానసంఖ్య మరియు 6ని భాగిస్తుంది$\}$
(ii)	$\{2, 3\}$	(b)	$\{x : x$ అనేది 10 కంటే తక్కువైన బేసి సహజ సంఖ్య$\}$
(iii)	{m, a, t, h, e, i, c, s}	(c)	$\{x : x$ అనేది సహజ సంఖ్య మరియు 6ని భాగిస్తుంది$\}$
(iv)	$\{1, 3, 5, 7, 9\}$	(d)	$\{x : x$ అనేది MATHEMATICS అనే పదంలో ఒక అక్షరం$\}$

2.3 శూన్య సమితి

క్రింది సమితులకు సంబంధించిన కొన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాం.

(i) A = $\{x : x$ అనేది 1 కంటే తక్కువైన ఒక సహజసంఖ్య$\}$

(ii) D = $\{x : x$ అనేది 2 చే భాగించబడే బేసి సంఖ్య$\}$

సమితి A, D లలో ఎన్ని మూలకాలున్నాయి? 1 కంటే తక్కువైన సహజసంఖ్య ఏదీ ఉండదని మనకు తెలుసు. కావున సమితి A లో ఎలాంటి మూలకాలుండవు. ఇటువంటి సమితులను శూన్యసమితులు అంటాం. A శూన్య సమితి (Nullset).

అదేవిధంగా 2 చే భాగించగల బేసి సంఖ్యలుండవు. కావున D కూడ శూన్య సమితే

ఒక సమితిలో ఎలాంటి మూలకాలు లేకుంటే అటువంటి సమితులను శూన్య సమితులంటాము. శూన్యసమితిని ϕ లేదా { } తో సూచిస్తాం.

క్రింద మరికొన్ని శూన్య సమితులకు ఉదాహరణలు ఇవ్వబడినవి.

(i) A = $\{x : 1 < x < 2, x$ ఒక సహజసంఖ్య$\}$

(ii) B = $\{x : x^2 - 2 = 0$ మరియు x ఒక అకరణీయసంఖ్య$\}$

(iii) D = $\{x : x^2 = 4, x$ ఒక బేసి సంఖ్య$\}$

గమనిక : ϕ మరియు {0} రెండు కూడా వేర్వేరు సమితులు. సమితి {0} లో ఒకే ఒక మూలకం 0 (సున్న) ఉంది. {} శూన్యసమితి (null set) లో మూలకాలేవీ లేవు.

ఇవి చేయండి

క్రింది వానిలో శూన్యసమితులు ఏవి? నీ సమాధానాన్ని సమర్థించండి.

(i) 2 మరియు 3 ల మధ్యనున్న పూర్ణసంఖ్యల సమితి.

(ii) 1 కంటే తక్కువైన సహజసంఖ్యా సమితి.

(iii) 2 చే భాగించినపుడు శేషం సున్న వచ్చే బేసిసంఖ్యా సమితి.

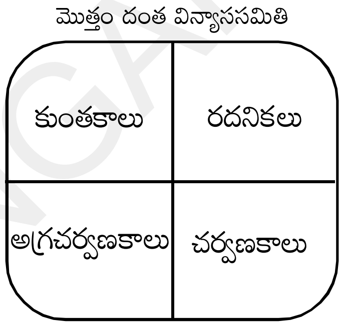
ప్రయత్నించండి

క్రింది సమితులలో ఏవి శూన్యసమితులు? మీ సమాధానాన్ని సమర్థించండి.

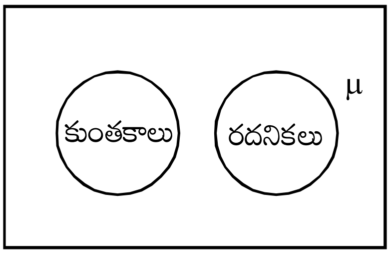
(i) A = $\{x : x^2 = 4$ మరియు $3x = 9\}$.

(ii) సమతలంలోని త్రిభుజాలన్నింటిలో మూడు కోణాల మొత్తం 180^0 కంటే తక్కువైన త్రిభుజాల సమితి.

2.4 విశ్వసమితి మరియు ఉపసమితి



మీరు ఈ అధ్యాయం ప్రారంభంలో చర్చించిన మొత్తం దంతవిన్యాసమును ఒక సమితిగా జ్ఞప్తికి తెచ్చుకోండి. మొత్తం దంతవిన్యాసాన్ని కుంతకాలు, రదనికలు, అగ్రచర్వణకాలు, చర్వణకాలు అనే నాలుగు సమితులుగా తిరిగి వర్గీకరించాం. మరి, చర్వణకాలలోని ప్రతీ దంతం మొత్తం దంతవిన్యాస సమితికి చెందుతుందా? లేదా? ఈ సందర్భంలో మొత్తం దంతవిన్యాస సమితిని ఈ నాలుగు దంతాల సమితులకు విశ్వసమితి (Universal set) అంటాం.



మొత్తం దంత విన్యాసాన్ని విశ్వసమితిగా భావిస్తే కుంతకాలు, రదనికలు రెండు సమితులైతే దీనిని ప్రక్కపటం ద్వారా కూడా చూపవచ్చు.

పటాన్ని పరిశీలించండి. పటంలో మిగిలిన ఖాళీభాగం దేన్ని సూచిస్తుంది? మిగిలిన ఖాళీ భాగం మిగతా దంతాలను సూచిస్తుంది కదా!

విశ్వసమితికి మరికొన్ని ఉదాహరణలు చూద్దాం.

(i) మన రాష్ట్రంలో వివిధ రకాలైన, ప్రజాసమూహాలను అధ్యయనం చేయాలంటే, తెలంగాణలోని ప్రజలందరూ విశ్వసమితిలోకి వస్తారు.

(ii) మన దేశంలో వివిధ రకాలైన ప్రజా సమూహాలను అధ్యయనం చేయాలంటే భారతదేశంలో నివసించే ప్రజలందరూ విశ్వసమితి అవుతారు.

విశ్వసమితిని '$\cup$' లేదా 'μ' తో సూచిస్తాం. విశ్వసమితిని సాధారణంగా దీర్ఘచతురస్రంలో μ చే సూచిస్తాము.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4 \ldots\}$ సహజసంఖ్యాసమితిని తీసుకోండి. దీనిని నుండి సరిసంఖ్యల సమితిని ఏర్పరచవచ్చును కదా! ఈ సందర్భంలో సరిసంఖ్యల సమితికి $\mathbb{N}$ విశ్వసమితి అవుతుంది. మరి, బేసిసంఖ్యల సమితికి $\mathbb{N}$ విశ్వసమితి అవుతుందా?

1. "x<3 అయితే x<4 అవుతుంది", దీనిని "$x<3 \Rightarrow x<4$" అని సూచిస్తాం.
2. "x-2 =5 అయినప్పుడు మాత్రమే x = 7 అవుతుంది", దీనిని "$x-2 = 5 \Leftrightarrow x=7$" అని సూచిస్తాం.

2.4.1 ఉపసమితి (SUBSET)

ఒక సమితి $A = \{1,2,3\}$ తీసుకోండి. ఈ సమితిలోని వీలైనన్ని మూలకాలు తీసుకొని సమితిని ఏర్పరచాలనుకొంటే అలాంటివి ఎన్ని సమితులను ఏర్పరచగలం?

ఇప్పుడు, $\{\ \}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}$ మరియు $\{1,2,3\}$ సమితులను ఏర్పరచవచ్చుకదా! ఇవేకాకుండా ఇంకా మరికొన్ని సమితులను ఏర్పరచగలరా?

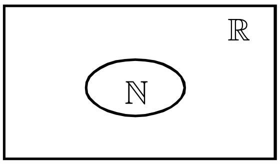
ఈ సమితులన్నింటిని A యొక్క **ఉపసమితులు** (Subsets) అంటాం. ఒక వేళ $\{1,2\}$ అనేది సమితి A యొక్క ఉపసమితి (Subset) అయితే $\{1,2\} \subset A$ గా రాసి చూపుతాం. A యొక్క ఉపసమితులలో $\{\ \}, \{1\}, \{2\}, \{3\}$ మొదలగువాటితో పాటు $\{1,2,3\}$ ను కూడా A యొక్క ఉపసమితిగా పరిగణిస్తాం.

సమితి A లోని మూలకాలన్నీ సమితి B లో ఉంటే, సమితి A ని సమితి B యొక్క ఉపసమితి అంటారు. దీనిని $A \subseteq B$ చే సూచిస్తాము.

అనగా, సమితి A లోని ప్రతీ మూలకం సమితి B లో ఉన్నప్పుడే (*if and only if*) $A \subseteq B$ అవుతుంది.

కాబట్టి ఏవేని రెండు సమితులు A, B లకు $A \subseteq B \Leftrightarrow$ "$a \in A \Rightarrow a \in B$."

వాస్తవ సంఖ్యాసమితి $\mathbb{R}$ కి చాలా ఉపసమితులు ఉన్నాయి. ఉదాహరణకు



సహజ సంఖ్యా సమితి $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots\}$

పూర్ణాంకాల సమితి $W = \{0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\}$

పూర్ణ సంఖ్యల సమితి $\mathbb{Z} = \{\ldots., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots..\}$

అకరణీయ సంఖ్యలు కాని వాస్తవ సంఖ్యలన్నీ కరణీయ సంఖ్యలు అవుతాయి.

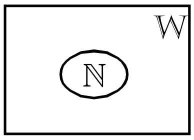
ϕ శూన్యసమితి మరియు A శూన్యేతర సమితి అయిన, ϕ అనేది A కు ఉపసమితి అవుతుందా? కాదనుకుంటే ϕ లో, A లో లేని ఒక మూలకము ఉండాలి. ϕ శూన్యసమితి అయినందున దానిలో అలాంటి మూలకాలు లేవు. కావున $\phi \subset A$

శూన్యసమితి ప్రతి సమితికి ఉపసమితి.

$A \subset A$ అవుతుందా? ఎడమవైపున గల A లోని మూలకాలన్ని కుడివైపున గల A లో కూడా ఉన్నాయి. కావున $A \subseteq A$.

ప్రతి సమితి దానికదే ఉపసమితి.

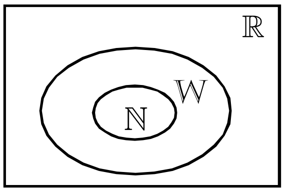
అందువలన $\mathbb{Q}' = \{x : x \in \mathbb{R}$ మరియు $x \notin \mathbb{Q}\}$. అంటే అకరణీయ సంఖ్యలు కాని అన్ని వాస్తవ సంఖ్యలు. ఉదా: $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ మరియు π.



అదేవిధంగా సహజ సంఖ్య సమితి, $\mathbb{N}$ అనేది పూర్ణాంకాల సమితి W కి ఉపసమితి అవుతుంది. దీన్ని $\mathbb{N} \subset W$ అని రాస్తాం. మరియు W, $\mathbb{R}$ కి ఉపసమితి.

i.e., $\mathbb{N} \subset W$ మరియు $W \subset \mathbb{R}$

$\Rightarrow \mathbb{N} \subset W \subset \mathbb{R}$



కొన్ని ఉపసమితులకు సంబంధించిన ముఖ్యమైన సంబంధాలు చూస్తే

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}' \subset \mathbb{R}$ మరియు $\mathbb{N} \not\subset \mathbb{Q}'$.

ఆంగ్ల భాషలో అచ్చుల సమితి తీసుకున్నట్లయితే $V = \{a, e, i, o, u\}$.

ఆంగ్ల భాషలోని అక్షరాలన్నీ ఒక సమితిగా తీసుకున్నట్లయితే $A = \{a, b, c, d, \ldots.., z\}$. ఈ ఉదాహరణలో విశ్వసమితి మరియు ఉపసమితిని గుర్తించండి.

సాధన : సమితి V లో ఉన్న ప్రతిమూలకం A కి కూడా మూలకంగా ఉంది. కాని సమితి A లో ఉన్న ప్రతి మూలకం సమితి V లో లేదు. అందువలన సమితి V, సమితి A కు శుద్ధోపసమితి మరియు $V \subset A$, అనగా $a \in V$ అయినపుడు $a \in A$ అవుతుంది.

ఇవి చేయండి

1. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4\}$, $C = \{1, 2, 3, 4, 7\}$, $F = \{\ \}$.
   అయిన క్రింది ఖాళీలను $\subset$ లేదా $\not\subset$ లతో పూరించండి.
   (i) A ….. B (ii) C ….. A (iii) B ….. A
   (iv) A ….. C (v) B ….. C (vi) ϕ ….. B
2. క్రింది వాక్యాలలో 'సత్యమైన' వాటిని పేర్కొనండి.
   (i) $\{\ \} = \phi$ (ii) $\phi = 0$ (iii) $0 = \{0\}$

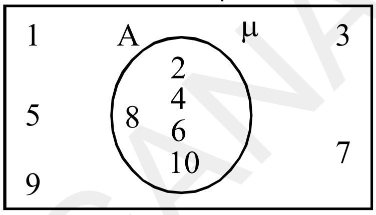
ప్రయత్నించండి

1. $A = \{$అన్ని చతుర్భుజాల రకాలు$\}$, $B = \{$చతురస్రం, దీర్ఘచతురస్రం, ట్రెపీజియం, రాంబస్$\}$. $A \subset B$ లేక $B \subset A$ అవుతుందేమో పేర్కొనండి. మీ సమాధానాన్ని సమర్థించండి.
2. $A = \{a, b, c, d\}$ అయిన A కి ఎన్ని ఉపసమితులున్నాయి?
   (A) 5 (B) 6 (C) 16 (D) 65
3. P అనేది 5 యొక్క కారణాంకాల సమితి. Q అనేది 25 యొక్క కారణాంకాల సమితి. R అనేది 125 యొక్క కారణాంకాల సమితి క్రింది వానిలో ఏది అసత్యం.
   (A) $P \subset Q$ (B) $Q \subset R$ (C) $R \subset P$ (D) $P \subset R$
4. A అనేది 10 కంటే తక్కువైన ప్రధానాంకాల సమితి, B అనేది 10 కంటే తక్కువైన బేసి సంఖ్యల సమితి మరియు C అనేది 10 కంటే తక్కువైన సరిసంఖ్యల సమితి. క్రింది వానిలో 'సత్యమైన' వాక్యాలేవి?
   (i) $A \subset B$ (ii) $B \subset A$ (iii) $A \subset C$
   (iv) $C \subset A$ (v) $B \subset C$ (vi) $\phi \subset A$

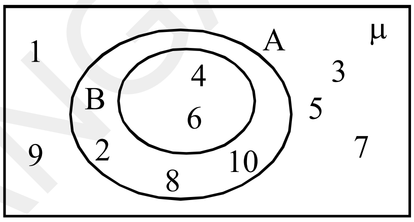
2.5 వెన్ చిత్రాలు (VENN DIAGRAMS)

ఇప్పటికే మనం సమితులను సూచించే కొన్ని రకాలైన చిత్రాలను చూశాం. ఇపుడు ఇంకా వివరంగా వాటి గురించి అధ్యయనం చేద్దాం. సమితుల మధ్య సంబంధాలను సూచించటానికి ఆయిలర్ వెన్ చిత్రాలను మనం ఉపయోగిస్తాం. ఈ చిత్రాలలో దీర్ఘచతురస్రాలు మరియు సంవృత వక్రాలు సాధారణంగా వృత్తాలుగా ఉంటాయి.

ఈ అధ్యాయంలో ఇంతకు ముందే సూచించిన విధంగా, విశ్వసమితిని సాధారణంగా దీర్ఘ చతురస్రంలో సూచిస్తాం.



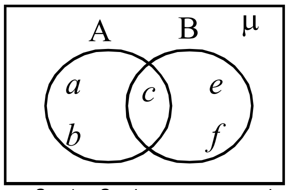
(i) $\mu=\{1, 2, 3, \ldots., 10\}$ విశ్వసమితి; $A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$ సమితి విశ్వసమితికి ఉపసమితి అవుతుంది. దీన్ని వెన్‌చిత్రాలలో ప్రక్కనున్నట్లు చూపవచ్చు.



(ii) $\mu = \{1, 2, 3, \ldots., 10\}$ విశ్వసమితి, $A=\{2,4,6,8,10\}$ మరియు $B = \{4,6\}$ లు μ కు ఉపసమితులు మరియు $B \subset A$. అయిన మనం ప్రక్కనున్న వెన్ చిత్రం ద్వారా పై వాటిని సూచించవచ్చు.

(iii) $A = \{a, b, c, d\}$ మరియు $B = \{c, d, e, f\}$.

మనం ఈ సమితులను వెన్‌చిత్రము ప్రక్కపటములో చూపిన విధంగా సూచించవచ్చు.

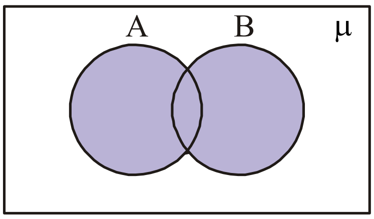


2.6 సమితులలో ప్రాథమిక పరిక్రియలు

అంకగణితంలో కూడిక, తీసివేత, గుణకారం మరియు భాగహారం లాంటి పరిక్రియలు ఉంటాయని మనకు తెలుసుగదా! అదేవిధంగా సమితులలో గూడా మనం సమ్మేళనాన్ని, ఛేదనాన్ని మరియు భేదాల పరిక్రియలను నిర్వచిద్దాం.

2.6.1 సమితుల సమ్మేళనం (Union of Sets)

నీ పాఠశాలలోని మొత్తం విద్యార్థుల సమితి μ అని, నీ తరగతి విద్యార్థులలో మంగళవారం పాఠశాలకు హాజరుకాని విద్యార్థుల సమితి A అని మరియు బుధవారం హాజరుకాని విద్యార్థుల సమితి B అనుకొందాం.



$A \cup B$

అపుడు $A = \{$రోజా, రాము. రవి$\}$ మరియు

$B = \{$రాము, ప్రీతి, హనీఫ్$\}$ అనుకొందాం.

ఇపుడు మనం మంగళవారం లేక బుధవారం పాఠశాలకు హాజరుకాని విద్యార్థుల సమితి K, అనుకుంటే అపుడు రోజా $\in$ K అవుతుందా? రాము $\in$ K అవుతుందా? రవి $\in$ K అవుతుందా? హనీఫ్ $\in$ K అవుతుందా? ప్రీతి $\in$ K అవుతుందా? అఖిల $\in$ K అవుతుందా?

రోజా, రాము, రవి, హనీఫ్ మరియు ప్రీతి అందరూ K సమితికి చెందుతారు. కాని అఖిల K సమితికి చెందదు.

అందువలన, $K = \{$రోజా, రాము, రవి, హనీఫ్, ప్రీతి$\}$

ఇక్కడ మనం K ని A, B సమితుల సమ్మేళనం అంటారు. A, B సమితుల సమ్మేళనమనగా A మరియు B సమితులు రెండింటిలోని మూలకాలన్నింటిని కలిగి వున్న సమితి అని అర్థం, సమితుల సమ్మేళనంను '$\cup$' గుర్తుతో సూచిస్తాం.

సమితుల సమ్మేళనం వెన్ చిత్రాలలో ఈ విధంగా గుర్తించబడింది. (షేడ్ చేయబడిన ప్రాంతం)

సంకేతంగా $A \cup B$ అని రాస్తూ A యూనియన్ B అని చదువుతాం.

$A \cup B = \{x : x \in A$ లేదా $x \in B\}$

ఉదాహరణ-1. $A = \{2, 5, 6, 8\}$ మరియు $B = \{5, 7, 9, 1\}$ అయిన $A \cup B$ కనుగొనుము.

సాధన : $A \cup B = \{2, 5, 6, 8\} \cup \{5, 7, 9, 1\} = \{2, 5, 6, 8, 5, 7, 9, 1\}$

$= \{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

$A \cup B$ రాసేటపుడు A .B సమితులలోని ఉమ్మడి మూలకమైన 5ని ఒకేసారి తీసుకొన్నామని గమనించవచ్చు.

ఉదాహరణ-2. $A = \{a, e, i, o, u\}$ మరియు $B = \{a, i, u\}$ అయిన $A \cup B = A$ అని చూపండి.

సాధన : $A \cup B = \{a, e, i, o, u\} \cup \{a, i, u\} = \{a, e, i, o, u, a, i, u\}$

$= \{a, e, i, o, u\} = A$ అవుతుంది.

ఈ ఉదాహరణ ద్వారా సమితి A మరియు దాని ఉపసమితి B ల సమ్మేళనం సమితి A అవుతుందని తెలుస్తుంది. అంటే $B \subset A$ అయితే $A \cup B = A$.

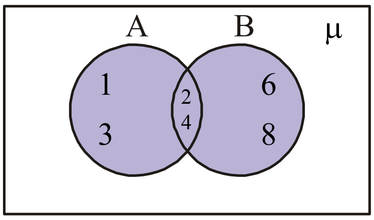
ఉదాహరణ-3. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ మరియు $B = \{2, 4, 6, 8\}$ అయిన $A \cup B$ ని వెన్ చిత్రాలలో వివరించండి.

సాధన : $A = \{1, 2, 3, 4\}$ మరియు $B = \{2, 4, 6, 8\}$

అయిన $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{2, 4, 6, 8\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 2, 4, 6, 8\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$



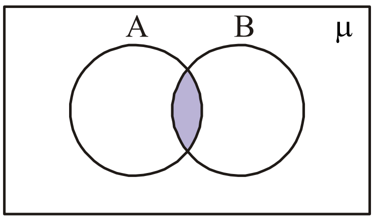
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

2.6.2 సమితుల ఛేదనం (Intersection of sets)

మరొకసారి తరగతికి హాజరుకాని విద్యార్థుల ఉదాహరణను పరిశీలిద్దాం. ఈ సారి మనం మంగళవారం మరియు బుధవారం కూడా హాజరు కాని విద్యార్థుల సమితిని L అనుకుందాం.

L = {రాము} అని కనుగొన్నాం.

ఇక్కడ, 'L' ని A, B సమితుల ఛేదనం అని అంటాం.



$A \cap B$

సాధారణంగా, సమితి A మరియు సమితి B లలో ఉన్న ఉమ్మడి మూలకాలను కలిగి ఉండే సమితిని A, B సమితుల ఛేదనం అంటాం. సమితి A మరియు సమితి B కి రెండింటికి చెందిన ఉమ్మడి మూలకాలు. సమితుల ఛేదనాన్ని మనం $A \cap B$. (A ఇంటర్‌సెక్షన్ B అని చదువుతాం) అని సూచిస్తాం. ప్రక్కపటంలో A, B సమితుల ఛేదనాన్ని వెన్ చిత్రాలలోని షేడ్ చేయబడిన ప్రాంతంలో మనం చూపవచ్చు. $A \cap B = \{x : x \in A$ మరియు $x \in B\}$

ఉదాహరణ-4. $A = \{5, 6, 7, 8\}$ మరియు $B = \{7, 8, 9, 10\}$ అయిన $A \cap B$ కనుగొనుము.

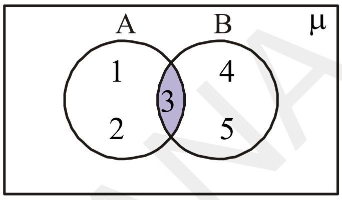
సాధన : సమితుల A, B లలోని ఉమ్మడి మూలకాలు

$$\therefore A \cap B = \{5, 6, 7, 8\} \cap \{7, 8, 9, 10\}$$

$$= \{7, 8\} \quad \text{(ఉమ్మడి మూలకాలు)}$$

ఉదాహరణ-5. $A = \{1, 2, 3\}$ మరియు $B = \{3, 4, 5\}$ అయిన $A \cap B$ని వెన్ చిత్రాలలో వివరించండి.

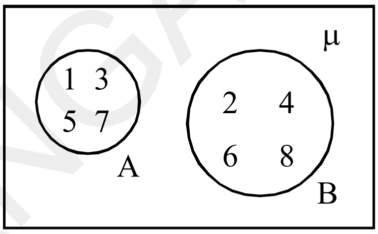
సాధన : A, B సమితుల ఛేదనాన్ని వెన్ చిత్రాలలో క్రింది విధంలో చూపవచ్చు.



$A \cap B = \{3\}$

వియుక్త సమితులు (Disjoint Sets)

$A = \{1, 3, 5, 7\}$ మరియు $B = \{2, 4, 6, 8\}$ అనుకోండి. సమితి A మరియు సమితి Bలలో ఉమ్మడి మూలకాలు లేవని మనం చూడచ్చు. అలాంటి సమితులను వియుక్త సమితులు అని అంటాం. వియుక్త సమితులను వెన్ చిత్రాలలో క్రింది విధంగా చూపవచ్చు.



$A \cap B = \phi$

ఇవి చేయండి

1. $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ మరియు $B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$ అయిన $A \cap B$ కనుక్కోండి.
2. $A = \{6, 9, 11\}; B = \{\ \}$ అయిన $A \cup \phi$ కనుక్కోండి.
3. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}; B = \{2, 3, 5, 7\}$. $A \cap B$ని కనుక్కోండి.
4. $A = \{4, 5, 6\}; B = \{7, 8\}$ అయిన $A \cup B = B \cup A$ అని చూపండి.

ప్రయత్నించండి

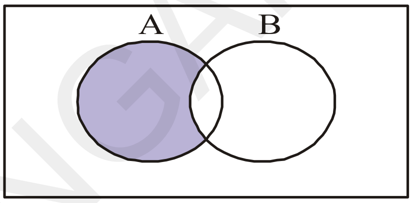
1. A మరియు B వియుక్త సమితులు అయ్యేటట్లుగా కొన్ని సమితులు A మరియు Bలు, వాని మూలకాలు ఎన్నుకొని జాబితా తయారుచేయండి.
2. $A = \{2, 3, 5\}$, అయిన $A \cup \phi$ మరియు $\phi \cup A$ కనుగొని పోల్చండి.
3. $A = \{1, 2, 3, 4\}; B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ అయిన $A \cup B$, $A \cap B$ కనుగొనండి. ఫలితం నుండి మీరు ఏమి గమనించారు ?
4. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. గా ఇవ్వబడినవి. A, Bల ఛేదనాన్ని కనుగొనండి.

ఆలోచించి - చర్చించండి

ఏవైనా రెండు వియుక్త సమితుల భేదనం శూన్యసమితి అవుతుంది. ఈ వాక్యం సత్యమా? అసత్యమా?

2.6.3 సమితుల భేదం (Difference of sets)

సమితి A అనేది 10 కంటే తక్కువైన బేసి సంఖ్యల సమితి, సమితి B ని 10 కంటే తక్కువయిన ప్రధాన సంఖ్యల సమితిగా తీసుకొంటే, 10 కంటే తక్కువైన ప్రధాన సంఖ్యలు కాని సమితి అనేది A కి చెంది, B కి చెందని మూలకముల సమితిని సూచిస్తుంది. దీనిని $A - B$గా వ్రాస్తాము.



$A–B = \{1, 9\}$

సమితి A కు మాత్రమే చెంది, B సమితికి చెందకుండా ఉండే మూలకాలతో ఏర్పడే సమితిని A, B సమితుల భేదం అని అంటారు.

$A - B = \{x : x \in A$ మరియు $x \notin B\}$.

ఉదాహరణ-6. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{4, 5, 6, 7\}$ అనుకొనుము. $A - B$ని కనుగొనుము.

సాధన : $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ మరియు $B = \{4, 5, 6, 7\}$ అని ఇవ్వబడినవి. 'A' సమితికి మాత్రమే చెంది, సమితి 'B' కి చెందని మూలకాలను మాత్రం తీసుకోవాలి.

$\therefore A–B = \{1, 2, 3, 4, 5\} - \{4, 5, 6, 7\} = \{1, 2, 3\}$. ($\because$ 4,5 మూలకాలు Bలో ఉన్నాయి.కాబట్టి తీసుకోలేదు).

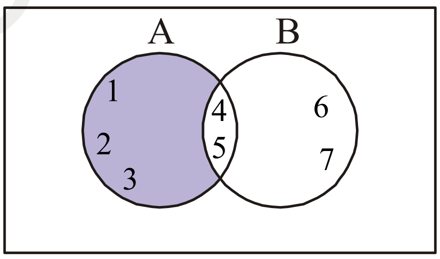
అదేవిధంగా $B - A$ అంటే, B సమితిలో ఉన్న మూలకాలను మాత్రమే తీసికోవాలి.

$B - A = \{4, 5, 6, 7\} - \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{6, 7\}$

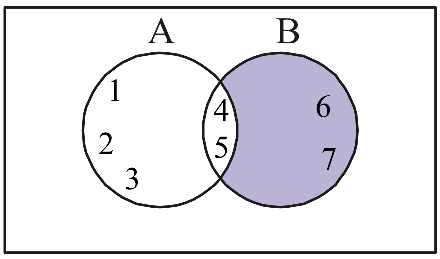
$\therefore B - A = \{6, 7\}$ (4, 5 మూలకాలు A లో ఉన్నాయి).

$A - B \neq B - A$ అని గమనించండి.

A-B మరియు $B - A$ ల వెన్ చిత్రాలు క్రింద చూపబడినావి.



$A - B = \{1, 2, 3\}$



$B - A = \{6, 7\}$

ఇవి చేయండి

1. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{4, 5, 6, 7\}$అయిన $A - B$ మరియు $B - A$ కనుగొనండి. $A - B$, $B - A$ లు రెండు సమానమా?
2. $V = \{a, e, i, o, u\}$ మరియు $B = \{a, i, k, u\}$ అయిన $V–B$ మరియు $B–V$ లను కనుగొనండి.

ఆలోచించి - చర్చించండి

సమితులు $A - B$, $B - A$ మరియు $A \cap B$ పరస్పరం వియుక్త సమితులు అవుతాయి. కొన్ని ఉదాహరణల సహాయంతో ఈ సత్యాన్ని పరిశీలించండి.

అభ్యాసం - 2.2

1. $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ అయిన $A \cap B$ మరియు $B \cap A$ కనుగొనండి. రెండు సమానమా?
2. $A = \{0, 2, 4\}$, $A \cap \phi$ మరియు $A \cap A$ కనుగొనండి. వ్యాఖ్యానించండి.
3. $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ మరియు $B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$ అయితే $A - B$ మరియు $B - A$ లను కనుగొనండి.
4. A మరియు B లు రెండు సమితులు, $A \subset B$ అయిన $A \cup B$ ఏమవుతుంది? ఒక ఉదాహరణతో వివరించండి.
5. $A = \{x : x$ ఒక సహజసంఖ్య$\}$
   $B = \{x : x$ ఒక సరిసంఖ్య$\}$
   $C = \{x : x$ ఒక బేసిసంఖ్య$\}$
   $D = \{x : x$ ఒక ప్రధానసంఖ్య$\}$ అయిన,
   $A \cap B$, $A \cap C$, $A \cap D$, $B \cap C$, $B \cap D$ మరియు $C \cap D$ లను కనుగొనుము.
6. $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21\}$; $B = \{4, 8, 12, 16, 20\}$
   $C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$; $D = \{5, 10, 15, 20\}$ అయిన క్రింది వానిని కనుగొనుము.
   (i) $A - B$ (ii) $A - C$ (iii) $A - D$ (iv) $B - A$ (v) $C - A$
   (vi) $D - A$ (vii) $B - C$ (viii) $B - D$ (ix) $C - B$ (x) $D - B$
7. క్రింద ఇవ్వబడిన వాక్యాలు సత్యమా లేక అసత్యమా? తెలుపండి. మీ సమాధానాలను సమర్థించండి.
   (i) $\{2, 3, 4, 5\}$ మరియు $\{3, 6\}$ లు వియుక్త సమితులు
   (ii) $\{a, e, i, o, u\}$ మరియు $\{a, b, c, d\}$ వియుక్త సమితులు
   (iii) $\{2, 6, 10, 14\}$ మరియు $\{3, 7, 11, 15\}$ లు వియుక్త సమితులు
   (iv) $\{2, 6, 10\}$ మరియు $\{3, 7, 11\}$ లు వియుక్త సమితులు.

2.7 సమసమితులు (EQUAL SETS)

క్రింది సమితులను గమనిద్దాం.

A = {సచిన్, ద్రావిడ్, కోహ్లి}

B = {ద్రావిడ్, సచిన్, ధోని}

C = {కోహ్లి, ద్రావిడ్, సచిన్}

సమితులు, A, B, Cలలో మీరు ఏమి పరిశీలించారు? సమితి Aలో ఉన్న ఆటగాళ్ళందరూ సమితి Cలో ఉన్నారు మరియు Cలోని ఆటగాళ్ళందరూ Aలో కలరు. అంటే సమితి A మరియు సమితి Cలలో ఒకే రకమైన మూలకాలున్నాయి. కాని సమితులు A, Bలలో మూలకాలు అన్నీ సమానం కావు. కాబట్టి సమితులు A మరియు Cలు సమసమితులు. కాని సమితులు A, B లు సమానం కావు.

రెండు సమితులు A మరియు Cలు సమానం కావాలంటే Aలోని ప్రతి మూలకం Cలో ఉండాలి (i.e. $A \subseteq C$). అలాగే Cలోని ప్రతి మూలకం Aకి చెందాలి (i.e. $C \subseteq A$).

A మరియు C లు సమసమితులైతే $A = C$ అని రాస్తాం.

దీన్నిబట్టి మనం $C \subseteq A$ మరియు $A \subseteq C \Leftrightarrow A = C$ అని కూడా రాయవచ్చు. ఇక్కడ $\Leftrightarrow$ గుర్తు రెండు వైపులా వర్తిస్తుంది మరియు దీనిని **అయినప్పుడే అలా అయినప్పుడు** (**if and only if** or **iff**) అని చదువుతాం.

ఒకవేళ సమితులు A, C లు ఒకే మూలకాలు కలిగి ఉన్నట్లయితే అవి సమసమితులు $A = C$. ఇంకా దీన్ని బట్టి ప్రతి సమితి దానికి అదే ఉపసమితి అవుతుందని చెప్పవచ్చు.

ఉదాహరణ-7. క్రింది సమితులను తీసికుందాం.

$A = \{p, q, r\}$ $\qquad$ $B = \{q, p, r\}$

పై సమితులలో A లోని ప్రతి మూలకం Bలో కూడా ఉంది. $\therefore A \subseteq B$.

అదేవిధంగా సమితి Bలోని ప్రతి మూలకం Aలో కూడా ఉంది. $\therefore B \subseteq A$.

పై రెండు సంబంధాల నుండి $A = B$ లని చెప్పవచ్చు.

ఉదాహరణ-8. $A = \{1, 2, 3, \ldots\}$ మరియు '$\mathbb{N}$' సహజసంఖ్యా సమితి. అయిన A మరియు $\mathbb{N}$ లు సమానమవుతాయేమో సరిచూడండి?

సాధన : రెండు సమితులలో మూలకాలు ఒకటి. కావున A మరియు $\mathbb{N}$ సమితులు రెండు కూడా సహజసంఖ్యా సమితులే. అందువలన సమితి A మరియు సమితి $\mathbb{N}$లు సమానం. $A = \mathbb{N}$.

ఉదాహరణ-9. సమితులు $A = \{1, 2, 3\}$ మరియు $B = \{1, 2, 3, 4\}$లు సమానమా?

సాధన : $A \subset B$ అవుతుంది. కాని $B \subset A$ కాదు. కాబట్టి $A \neq B$.

ఉదాహరణ-10. 6 కంటే తక్కువైన ప్రధానాంకాల సమితిని A అనుకోండి. మరియు 30కి ప్రధాన కారణాంకాలు గల సమితిని B అనుకోండి. A మరియు B సమానమా? సరిచూడండి.

సాధన: 6 కంటే తక్కువైన, ప్రధానాంకాల సమితి A = { 2,3,5}

30కి ప్రధాన కారణాంకాలు 2, 3 మరియు 5. కావున B = { 2,3,5}

సమితి A మరియు B లలో ఒకే మూలకాలున్నాయి కాబట్టి A మరియు B సమానం.

ఉదాహరణ-11. C = {x : x అనేది 'ASSASSINATION' అనే పదంలోని అక్షరం}

B = {x : x అనేది STATION అనే పదంలోని అక్షరం}

అయిన C మరియు B సమితులు సమానం అని చూపండి.

సాధన : C = {x : x అనేది 'ASSASSINATION' అనే పదంలోని అక్షరం} అని ఇవ్వబడినది.

సమితి Cని ఈ విధంగా కూడా రాయచ్చు. C = {A,S,I,N,T,O}. ఎందుకంటే సమితిలోని మూలకాలు మరలా మరలా రాయకూడదు.

B = {x : x అనేది STATION అనే పదంలోని అక్షరం} అని ఇవ్వబడింది.

B = {A,S,I,N,T,O} అని కూడా రాయచ్చు.

C మరియు B లో ఒకే మూలకాలు కలవు. కావున C = B

$C \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow C = B$

ఉదాహరణ-12. ϕ, A = {1, 3}, B = {1, 5, 9}, C = {1, 3, 5, 7, 9} సమితులను తీసికొందాం. క్రింది ప్రతి సమితుల జతలలో $\subset$ లేదా $\not\subset$ గుర్తును ఉంచండి.

(i) ϕ ….. B (ii) A ….. B (iii) A ….. C (iv) B ….. C

సాధన : (i) $\phi \subset B$ ఎందుకంటే శూన్య సమితి ప్రతిసమితికి ఉపసమితి అవుతుంది.

(ii) $A \not\subset B$, ఎందుకంటే $3 \in A$ కాని $3 \notin B$.

(iii) $A \subset C$, ఎందుకంటే 1, 3 $\in$ A మరియు C.

(iv) $B \subset C$, ఎందుకనగా B లో ఉన్న ప్రతి మూలకం Cలో కూడా ఉన్నది.

అభ్యాసం - 2.3

1. క్రింది వాటిలో సమసమితులు ఏవి?

   A = {x : x అనేది 'FOLLOW' అనే పదంలో ఒక అక్షరం}, B = {x : x అనేది 'FLOW' అనే పదంలో ఒక అక్షరం} మరియు C = {x : x అనేది 'WOLF' అనే పదంలోని ఒక అక్షరం}

2. క్రింది సమితులను పరిశీలించి, క్రింద ఇచ్చిన వాక్యాలు సరియగునట్లు = లేదా $\neq$ తో ఖాళీలను పూరించండి.

   A = {1, 2, 3}; B = {మొదటి మూడు సహజసంఖ్యలు}

   C = $\{a, b, c, d\}$; D = $\{d, c, a, b\}$

   E = $\{a, e, i, o, u\}$; F = {ఆంగ్లభాషలోని అచ్చులసమితి}

   (i) A ...... B (ii) A......E (iii) C ...... D

   (iv) D ...... F (v) F...... A (vi) D ...... E

   (vii) F ...... B

3. క్రింద ఇచ్చిన ప్రతి సమితిలో A = B అవుతుందో లేదో తెలపండి.

   (i) A = $\{a, b, c, d\}$ B = $\{d, c, a, b\}$

   (ii) A = {4, 8, 12, 16} B = {8, 4, 16, 18}

   (iii) A = {2, 4, 6, 8, 10} B = {x : x ఒక ధన సరిపూర్ణ సంఖ్య మరియు $x \leq 10$}

   (iv) A = {x : x, 10 యొక్క గుణిజం} B = {10, 15, 20, 25, 30, ...}

4. క్రింది వాక్యాలకు తగు కారణాలు పేర్కొనండి.

   (i) {1, 2, 3, ..., 10} $\neq$ {x : $x \in \mathbb{N}$ మరియు $1 < x < 10$}

   (ii) {2, 4, 6, 8, 10} $\neq$ {x : x = 2n+1 మరియు $x \in \mathbb{N}$}

   (iii) {5, 15, 30, 45} $\neq$ {x : x, 15 యొక్క గుణిజం}

   (iv) {2, 3, 5, 7, 9} $\neq$ {x : x ఒక ప్రధాన సంఖ్య}

5. క్రింది సమితులకు గల ఉపసమితులన్నింటి జాబితాను రాయండి.

   (i) B = $\{p, q\}$ (ii) C = $\{x, y, z\}$ (iii) D = $\{a, b, c, d\}$

   (iv) E = [1, 4, 9, 16] (v) F = {10, 100, 1000}

2.8 పరిమిత మరియు అపరిమిత సమితులు (FINITE AND INFINITE SETS)

క్రింది సమితులను పరిశీలిద్దాం.

(i) A = {నీ పాఠశాలలోని విద్యార్థులు} (ii) L = $\{p,q,r,s\}$

(iii) B = {x : x ఒక సరిసంఖ్య} (iv) J = {x : x, 7 యొక్క గుణిజం}

పైన సూచించిన ప్రతి సమితిలోని మూలకాల సంఖ్యల జాబితాను నీవు రాయగలవా? (i) లో మూలకాల సంఖ్య నీ పాఠశాలలోని విద్యార్థులందరూ అవుతారు. (ii)లో సమితి L లో ఉన్న మూలకాల సంఖ్య 4. దీన్ని బట్టి సమితి A మరియు L లోని మూలకాల సంఖ్యను మనం ఒక పూర్ణాంకంతో చెప్పవచ్చు. ఎందుకంటే A , L సమితులలో పరిమిత సంఖ్యలో మూలకాలున్నాయి. ఇలాంటి సమితులను 'పరిమిత సమితులు" అంటాం.

ఇపుడు సమితి Bలో పరిశీలించినట్లయితే అన్ని సరిసంఖ్యలు మూలకాలుగా ఉన్నాయి. మనం వీటిని ఎన్నియో చెప్పలేము. అంటే సమితి 'B'లోని మూలకాల సంఖ్య పరిమితంగా లేదు. అదేవిధంగా సమితి 'J' లోని మూలకాలను ఎన్నియో చెప్పలేము. దీన్నిబట్టి సమితి B మరియు J లోని మూలకాల సంఖ్య అపరిమితం అని కనుగొన్నాము. ఇలాంటి సమితులను 'అపరిమిత సమితులు' అని అంటారు.

ఇచ్చిన బిందువు ద్వారా మనం అనంత సరళరేఖలు గీయవచ్చు. అందువలన ఇది అపరిమిత సమితి అవుతుంది. అదేవిధంగా అన్ని పూర్ణసంఖ్యల సమూహాలలో చివర సంఖ్యను మనం కనుగొనడం సాధ్యం కాదు. అందువలన ఒక సమితి పరిమిత సమితి కాకపోతే అది అపరిమిత సమితి అవుతుందని చెప్పవచ్చు.

మరికొన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాం.

(i) వారంలోని రోజుల సమితిని 'W' అనుకుంటే 'W' పరిమిత సమితి అవుతుంది.

(ii) $x^2 - 16 = 0$ సమీకరణం యొక్క సాధన సమితి 'S' అనుకుంటే 'S' పరిమిత సమితి అవుతుంది.

(iii) ఒక సరళరేఖపై ఉన్న బిందువుల సమితిని 'G' అనుకుంటే 'G' అపరిమిత సమితి అవుతుంది.

ఉదాహరణ-13. క్రింది సమితులలో ఏవి పరిమిత సమితులో, లేక అపరిమిత సమితులో పేర్కొనండి.

(i) {$x : x \in \mathbb{N}$ మరియు $(x-1)(x-2) = 0$} (ii) {$x : x \in \mathbb{N}$ మరియు $x^2 = 4$}

(iii) {$x : x \in \mathbb{N}$ మరియు $2x - 2 = 0$} (iv) {$x : x \in \mathbb{N}$ మరియు x ప్రధానసంఖ్య}

(v) {$x : x \in \mathbb{N}$ మరియు x బేసిసంఖ్య}

సాధన :

(i) ఈ సందర్భంలో x కి సాధన 1 లేదా 2. కావున $\{1, 2\}$ పరిమితసమితి అవుతుంది. ఇది పరిమిత సమితి.

(ii) $x^2 = 4$ అనగా $x = +2$ లేక -2 కాని $x \in \mathbb{N}$ లేదా x ఒక సహజ సంఖ్య కాబట్టి $\{2\}$గా తీసికోవాలి. ఇది కూడా పరిమిత సమితే.

(iii) దత్తసమితి $x = 1$ కాని $1 \in \mathbb{N}$ కావున ఇది కూడా పరిమిత సమితి.

(iv) దత్తసమితి అన్ని ప్రధానసంఖ్యల సమితిగా ఉంది. ప్రధానసంఖ్యలు అనంతము కావున ఈ సమితి అపరిమిత సమితి.

(v) దత్త సమితిలో అనంతమైన బేసి సంఖ్యలున్నాయి. కావున ఈ సమితి కూడా అపరిమిత సమితియే.

2.9 పరిమిత సమితి యొక్క కార్డినల్ సంఖ్య (CARDINALITY OF A FINITE SET)

క్రింది పరిమిత సమితులను పరిశీలిద్దాం.

A = {1, 2, 4}; B = {6, 7, 8, 9, 10}; C = {x : x అనేది INDIA అనే పదంలోని అక్షరం}

ఇక్కడ,

సమితి A లోని మూలకాల సంఖ్య = 3.

సమితి B లోని మూలకాల సంఖ్య = 5.

సమితి Cలోని మూలకాల సంఖ్య = 4 (సమితి Cలో 'I' మూలకం రెండుసార్లు వస్తుంది. ఒక సమితిలో ఉన్న మూలకాలు వేర్వేరుగా ఉండాలని మనకు తెలుసుకదా. కావున సమితి C లోని మూలకాల సంఖ్య 4 అవుతుంది).

ఒక పరిమిత సమితిలోని మూలకాల సంఖ్యను తెలిపే సంఖ్యని ఆ సమితికి 'కార్డినల్ సంఖ్య' (Cardinal Number or Cardinality) అని అంటాం. సమితి A యొక్క కార్డినల్ సంఖ్యకు $n(A) = 3$ అని సూచిస్తాం.

అదేవిధంగా, $n(B) = 5$, $n(C) = 4$.

పరిమిత సమితి యొక్క కార్డినాలిటి పూర్ణాంకము. అపరిమిత సమితి యొక్క కార్డినల్ సంఖ్య లేదా కార్డినాలిటిని గూర్చి పై తరగతులలో నేర్చుకోవడం జరుగుతుంది.

గమనిక : శూన్యసమితిలో మూలకాలు ఉండవు. శూన్యసమితి యొక్క కార్డినల్ సంఖ్య '0'(సున్న) అవుతుంది.

$$\therefore n(\phi) = 0$$

ఇవి చేయండి

1. క్రింది సమితులలో ఏవి పరిమిత సమితులో, ఏవి అపరిమిత సమితులో తెల్పండి. నీ సమాధానానికి తగిన కారణాలు తెల్పండి.

   (i) A = {x : $x \in$ N మరియు $x < 100$} (ii) B = {x : $x \in$ N మరియు $x \leq 5$}

   (iii) C = {$1^2, 2^2, 3^2, \ldots..$} (iv) D = {1, 2, 3, 4}

   (v) {x : x వారంలో ఒక రోజు}.

2. క్రింది సమితులలో అపరిమిత సమితిని ✓ చేయండి.

   (A) 10 కంటే తక్కువైన పూర్ణాంకాల సమితి (B) 10 కంటే తక్కువైన ప్రధానసంఖ్యల సమితి

   (C) 10 కంటే తక్కువైన పూర్ణసంఖ్యల సమితి (D) 10 యొక్క కారణాంకాల సమితి

ఆలోచించి - చర్చించండి

శూన్య సమితి పరిమిత సమితి అవుతుంది. ఈ వాక్యం సత్యమా? లేదా అసత్యమా? ఎందుకు ?

అభ్యాసం - 2.4

1. క్రింది సమితులలో ఏవి శూన్యసమితులో, ఏవి కావో తెల్పండి.
   (i) ఒక బిందువు గుండా వెళ్ళే సరళరేఖల సమితి
   (ii) 2 చే భాగించబడే బేసి సహజ సంఖ్యల సమితి.
   (iii) $\{x : x$ ఒక సహజసంఖ్య, $x < 5$ మరియు $x > 7\}$
   (iv) $\{x : x$ ఏవేని రెండు సమాంతర రేఖల ఉమ్మడి బిందువు$\}$
   (v) సరి ప్రధాన సంఖ్యల సమితి.

2. క్రింది సమితులలో ఏవి పరిమిత సమితులో ఏవి అపరిమిత సమితిలో తెలపండి.
   (i) ఒక సంవత్సరంలోని నెలల సమితి.
   (ii) $\{1, 2, 3, \ldots, 99, 100\}$
   (iii) 99 కంటే తక్కువగా గల ప్రధానసంఖ్యల సమితి.
   (iv) ఆంగ్ల భాషలోని అక్షరాల సమితి.
   (v) X- అక్షానికి సమాంతరంగా గీయగల రేఖల సమితి.
   (vi) 5 యొక్క గుణిజాల సమితి.
   (vii) మూలబిందువు గుండా వెళ్ళే వృత్తాల సమితి.

ఉదాహరణ-14. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{2, 4, 6, 8\}$; అయిన $n(A \cup B)$ కనుగొనండి.

సాధన : సమితి A లో ఐదు మూలకాలున్నాయి $\therefore n(A) = 5$

మరియు సమితి B లో నాలుగు మూలకాలున్నాయి $\therefore n(B) = 4$

$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,8\}$, కానీ ఇందులో తొమ్మిది మూలకాలు ఉండాల్సిన చోట ఏడు మూలకాలే ఉన్నాయి కదా! ఎందుకు?

ఆలోచించి - చర్చించండి

1. $n(A)$, $n(B)$, $n(A \cap B)$ మరియు $n(A \cup B)$ ల మధ్య సంబంధం ఏమిటి?
2. సమితులు A మరియు B లు వియుక్త సమితులైతే $n(A \cup B)$ ని ఎలా కనుగొంటారు?

ప్రాజెక్టు పని

సమితి భావన – సమితుల ధర్మాలు – ప్రక్రియలు

తరగతిగదిలో ఏవైని రెండు ఇష్టమైన ఆటలు/ వార్తాపత్రికలు/ టి.వి. ఛానల్స్ మొదలగు వాటి గూర్చి సర్వే నిర్వహించి, వాటికి సంబంధించిన సమాచారాన్ని సేకరించండి. సమితులను ఉపయోగించి

i) 1వ ఆట/ 1వ టి.వి.ఛానల్‌లను ఇష్టపడే వారి సంఖ్య ఎంత?

ii) 2వ ఆట/ 2వ టి.వి.ఛానల్‌లను ఇష్టపడే వారి సంఖ్య ఎంత?

iii) 1వ ఆట మరియు 1వ టి.వి.ఛానల్‌లను ఇష్టపడే వారి సంఖ్య ఎంత?

iv) ఏదీ ఇష్టపడని వారి సంఖ్య ఎంత?

కొనసాగింపు కృత్యం: పై ప్రాజెక్టును మూడు అంశాలపై కూడా నిర్వహించవచ్చు.

మనం ఏమి చర్చించాం

1. సునిర్వచిత విభిన్న వస్తువుల సముదాయాన్ని సమితి అంటారు. సునిర్వచితం అనగా

   (i) పరిగణనలోకి తీసుకున్న వస్తువులన్నీ విశ్వ సమూహంలో ఉండును.

   (ii) విశ్వ సమూహంలో ఏ వస్తువైనా సమితికి మూలకం కావచ్చు లేదా కాకపోవచ్చు.

U5S2B7

2. సమితిలోని వస్తువులను మూలకాలు అని అంటాం. 'చెందుతుంది' అని సూచించటానికి $\in$ అనే గుర్తుని ఉపయోగిస్తాం.

3. సమితులను రోస్టర్ రూపంలో రాయవచ్చు. సమితిలోని మూలకాలన్నింటిని రాసి కామా (commas)లతో వేరేచేసి, { } (ఫ్లవర్) బ్రాకెట్లలో ఉంచాలి.

4. సమితులను సమితి నిర్మాణరూపంలో కూడా రాయచ్చు.

5. ఒక సమితిలో మూలకాలు లేకుంటే ఆ సమితిని శూన్య సమితి అంటాం.

6. ఒక సమితిలోని మూలకాలను లెక్కించగలిగితే ఆ సమితిని పరిమిత సమితి అంటాం.

7. పరిమిత సమితి కానటువంటి సమితులను అపరిమిత సమితులు అని అంటారు.

8. ఒక పరిమిత సమితిలో గల మూలకాల సంఖ్యను ఆ సమితి యొక్క 'కార్డినల్' సంఖ్య అని అంటాం.

9. విశ్వసమితిని 'μ'తో సూచిస్తాం. విశ్వసమితిని సాధారణంగా దీర్ఘచతురస్రాలలో సూచిస్తాము.

10. సమితి A, B సమితికి ఉపసమితి ఎప్పుడవుతుందంటే 'a' అనే మూలకం A కి చెంది, B కు కూడా చెందితే A ని B యొక్క ఉపసమితి అంటారు. దీన్ని ఈ క్రింది విధంగా రాస్తాం.

   $a \in A \Rightarrow a \in B$ అయితే $A \subset B$ (A, B లు రెండు సమితులు)

11. రెండు సమితులు A మరియు B సమానం కావాలంటే A లోని ప్రతి మూలకం B లో ఉండాలి మరియు B లోనే ప్రతి మూలకం కూడా A లో ఉండాలి.

12. A, B సమితుల సమ్మేళనాన్ని $A \cup B$ అని రాయవచ్చు. $A \cup B = \{x : x \in A$ లేక $x \in B\}$.

13. A, B సమితుల ఛేదనాన్ని $A \cap B$ అని రాయచ్చు. $A \cap B = \{x : x \in A$ మరియు $x \in B\}$

14. A, B సమితుల భేదాన్ని $A - B$ తో రాయచ్చు. $A - B = \{x : x \in A$ మరియు $x \notin B\}$

15. సమితుల ప్రాథమిక ప్రక్రియలు ప్రదర్శించడానికి వెన్ చిత్రాలు సౌకర్యవంతంగా ఉంటాయి.

అధ్యాయము

3 బహుపదులు

(Polynomials)

X4X9H6

3.1 పరిచయం

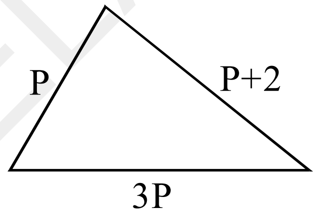
మనం 9వ తరగతిలో 'బహుపదులు' గురించి నేర్చుకున్నాం కదా! ఇప్పుడు కింది సందర్భాలను పరిశీలిద్దాం.

1. ఒక పూల తోట త్రిభుజాకారంలో వుంది. అతి పెద్దభుజం, అతిచిన్న భుజానికి 3 రెట్లు, అతిచిన్న భుజం, మధ్యభుజం కన్నా 2 యూనిట్లు చిన్నదిగానూ వుంది. చిన్న భుజం పొడవు **P** యూనిట్లు. అయితే ఈ త్రిభుజ చుట్టుకొలత **P** ప్రమాణాలలో ఎంత వుంటుంది ?

పై సందర్భాన్ని పరిశీలిస్తే, దానిలో ఒక అవ్యక్తరాశి వుంది. ఈ సందర్భంలో, చిన్నభుజం '**P**' యూనిట్లు అని ఇవ్వబడింది.

కావున, త్రిభుజచుట్టుకొలత = భుజాల పొడవుల మొత్తము

$= P + 3P + (P + 2)$
$= 5P + 2$



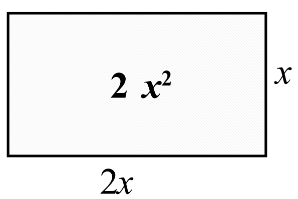
2. ఒక భోజనశాల పొడవు వెడల్పు కన్నా రెండు రెట్లు పెద్దది. ఆ గది వెడల్పు 'x' యూనిట్లు అయితే, దాని నేల వైశాల్యం x ప్రమాణాలలో ఎంత వుంటుంది?

ఈ సందర్భంలో పొడవు, వెడల్పుకు రెట్టింపు

కావున, వెడల్పు $= x$, అయితే పొడవు $= 2x$ అవుతుంది.

దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యము $= lb$

$= (2x)\,(x)$
$= 2\,x^2$



దీని నుండి త్రిభుజ చుట్టుకొలత $5P + 2$ మరియు దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యము $2x^2$ అనేవి విభిన్న పరిమాణాలు గల బహుపదులు అని చెప్పవచ్చు.

3.2 బహుపదులు అంటే ఏమిటి?

a ఒక వాస్తవ సంఖ్య మరియు n ఒక పూర్ణాంకం అయి ax^n రూపంలో ఉన్న పరిమిత పదాల మొత్తంగా రాయబడిన బీజీయ సమాసంను బహుపది అని అంటాం.

బహుపదులు	బహుపదులు కావు
$2x$	$4x^{\frac{1}{2}}$
$\frac{1}{3}x-4$	$3x^2 + 4x^{-1} + 5$
$x^2 - 2x - 1$	$4+\frac{1}{x}$

ఇవి చేయండి

కింది సమాసాలలో ఏవి బహుపదులు? ఏవికావు? కారణాలు తెల్పండి.

(i) $2x^3$ (ii) $\frac{1}{x}-1(x\neq 0)$ (iii) $4z^2+\frac{1}{7}$ (iv) $m^2-\sqrt{2}\,m+2$ (v) $P^{-2}+1$

3.2.1 బహుపది పరిమాణము (Degree of Polynomial)

x చరరాశిలోగల బహుపది $p(x)$లో x యొక్క గరిష్ఠ ఘాతాంకము $p(x)$ బహుపది యొక్క పరిమాణము అగునని గుర్తుకు తెచ్చుకోండి. ఉదాహరణకు x చరరాశిలో గల ఒక బహుపది $3x + 5$. దీని పరిమాణము 1, కావున ఇది రేఖీయ బహుపది. ఇదేవిధంగా $5x$, $\sqrt{2}y+5$, $\frac{1}{3}$P, $m + 1$ మొ॥నవి మరికొన్ని రేఖీయ బహుపదులు. రెండవ పరిమాణము గల బహుపదిని వర్గబహుపది అంటారు.

ఉదాహరణకు $x^2 + 5x + 4$ అనేది x చరరాశి గా గల ఒక వర్గ బహుపది. ఇదేవిధంగా $2x^2 + 3x - \frac{1}{2}$, $p^2 -1$, $3 - z - z^2$, $y^2 - \frac{y}{3} + \sqrt{2}$ అనేవి మరికొన్ని వర్గ బహుపదులు.

$5x^3-4x^2+x-1$ అనే సమాసము x చరరాశిగా గల మూడవ పరిమాణ బహుపది. దీనిని మనం త్రిపరిమాణ బహుపది అంటాము. ఇదేవిధంగా $2 - x^3$, p^3, $\ell^3 - \ell^2 - \ell + 5$ అనేవి మరికొన్ని త్రిపరిమాణ బహుపదులు.

'6' ను $6 \times x^0$గా వ్రాయవచ్చు. ఇక్కడ x యొక్క ఘాత సంఖ్య '0'. కావున, అది శూన్య (సున్నా) పరిమాణ బహుపది అగును.

ప్రయత్నించండి

విభిన్న పదాలతో ఏవైనా మూడు త్రిపరిమాణ, వర్గ బహుపదులను, రెండు రేఖీయ బహుపదులను రాయండి.

మనం బహుపదులను ఏ పరిమిత పరిమాణానికైనా రాయవచ్చు. $7u^6-\frac{3}{2}u^4+4u^2-8$ అనేది 6 వ పరిమాణ బహుపది. $x^{10} - 3x^8 + 4x^5 + 2x^2 -1$ అనేది 10 పరిమాణ బహుపది.

n ఒక పూర్ణాంక సంఖ్యగా వుండి x చరరాశితో కూడి n వ పరిమాణ బహుపదిని మనం రాయవచ్చు.

సాధారణంగా, మనము

$p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1} x + a_n$ అనేది n వ పరిమాణ బహుపది అంటాము. ఇందులో $a_0, a_1, a_2 \ldots . a_{n-1}, a_n$ అనేవి చరరాశి x యొక్క గుణకాలు మరియు $a_0 \neq 0$

ఉదాహరణకు ఒక చరరాశిలో గల ప్రథమ పరిమాణ బహుపది $ax+b$ అవుతుంది. ఇందులో a, b లు వాస్తవ సంఖ్యలు మరియు $a \neq 0$.

ప్రయత్నించండి

1. x చరరాశిలో గల వర్గ బహుపది, త్రిపరిమాణ బహుపదుల సాధారణ రూపాలను రాయండి.
2. n పరిమాణం కలిగిన ఒక బహుపది $q(z)$ ను రాయండి. ఇందులో చరరాశి గుణకాలుగా $b_0, b_1, b_2, \ldots., b_n$ తీసుకుంటే, వాటికి ఏ నిబంధనలు వర్తిస్తాయో తెల్పండి.

3.2.2 బహుపది యొక్క విలువ (Value of Polynomial)

$p(x) = x^2 - 2x - 3$ అనే బహుపదిని పరిశీలించండి. చరరాశి యొక్క ఏదేని ఒక విలువకు ఈ బహుపది యొక్క విలువ ఏమౌతుంది? ఉదాహరణకు $x = 1$ అయినప్పుడు దీని విలువ ఎంత? ఈ బహుపదిలో $x = 1$ ప్రతిక్షేపించిన $p(1) = (1)^2 - 2(1) - 3 = -4$. ఇది $p(x)$లో గల ప్రతిపదంలో చరరాశి x కు బదులుగా 1 ప్రతిక్షేపించగా వచ్చినది అంటే $x = 1$ అయినపుడు $x^2 - 2x - 3$ విలువ -4 అయింది.

ఇదేవిధంగా, $x = 0$ విలువ వద్ద $p(x)$ విలువ $p(0) = -3$ అవుతుంది.

k వాస్తవ సంఖ్య అయినపుడు చరరాశి 'x' కు బదులుగా k ను ప్రతిక్షేపిస్తే వచ్చే విలువ $p(k)$ అవుతుంది. దీనిని k వద్ద $p(x)$ అనే బహుపది విలువ అంటాం.

ఇవి చేయండి.

(i) $p(x) = x^2 - 5x - 6$ అయిన $p(1), p(2), p(3), p(0), p(-1), p(-2), p(-3)$ విలువలు కనుగొనండి.

(ii) $p(m) = m^2 - 3m + 1$ అయిన $p(1)$ మరియు $p(-1)$ విలువలు కనుగొనండి.

3.2.3 బహుపది శూన్యాలు (Zeroes of a Polynomial)

$x = 3, -1$ మరియు 2లు వద్ద $p(x) = x^2 - 2x - 3$ విలువలు ఎంత?

$$p(3) = (3)^2 - 2(3) - 3 = 9 - 6 - 3 = 0$$

ఇదేవిధంగా మనకు $$p(-1) = (-1)^2 - 2(-1) - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$$

మరియు $$p(2) = (2)^2 - 2(2) - 3 = 4 - 4 - 3 = -3$$

మనకు $p(3) = 0$ మరియు $p(-1) = 0$ అయినవి. అంటే 3 మరియు -1 అనేవి $p(x) = x^2 - 2x - 3$ అనే బహుపది యొక్క శూన్యాలు అవుతాయి.

$p(2) \neq 0$ కావున 2 అనేది $p(x)$ యొక్క 'శూన్యం' కాలేదు.

అందుచే, సాధారణంగా ఒక వాస్తవసంఖ్య k అనేది బహుపది $p(x)$ కు శూన్యం కావాలంటే $p(k) = 0$ కావాలి.

ఇవి చేయండి

(i) $p(x) = x^2 - 4x + 3$ అయిన $p(0), p(1), p(2), p(3)$ విలువలు కనుగొనండి. $p(x)$ యొక్క శూన్యాలు ఏవో తెల్పండి.

(ii) $x^2 - 9$ అనే బహుపదికి -3 మరియు 3 శూన్యాలు అవుతాయో కాదో సరిచూడండి.

అభ్యాసం - 3.1

1. $p(x) = 5x^7 - 6x^5 + 7x - 6$ అయిన కింది వానిని కనుగొనండి.

   (i) x^5 యొక్క గుణకం (ii) $p(x)$ యొక్క పరిమాణం

   (iii) స్థిరపదము

2. కింది ప్రవచనాలలో ఏవి సత్యం ? ఏవి అసత్యం ? కారణాలను తెల్పండి.

   (i) $\sqrt{2}x^2 - 3x + 1$ అనే బహుపది పరిమాణం $\sqrt{2}$.

   (ii) $p(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5x + 7$ అనే బహుపదిలో x^2 యొక్క గుణకం 2.

   (iii) స్థిర పదం యొక్క పరిమాణం సున్న.

   (iv) $\dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$ అనేది ఒక వర్గ బహుపది.

   (v) ఒక బహుపది పరిమాణము దానిలో పదాల సంఖ్య కన్నా ఒకటి ఎక్కువ.

3. $p(t) = t^3 - 1$ అయిన $p(1), p(-1), p(0), p(2)$ మరియు $p(-2)$ విలువలు కనుగొనండి.

4. -2 మరియు 2 అనేవి $x^4 - 16$ అనే బహుపదికి శూన్యాలు అగునో, కాదో సరి చూడండి.

5. $p(x) = x^2 - x - 6$ అనే బహుపదికి 3 మరియు -2 అనేవి శూన్యాలు అగునో, కాదో సరిచూడండి.

3.3 బహుపదులతో ప్రక్రియలు

ఒక రేఖీయ బహుపదికి 'శూన్యాలు' ఏవిధంగా కనుగొనాలో ఇదివరకే నేర్చుకున్నాము.

ఉదాహరణకు ఒక బహుపది $p(x) = 2x + 5$ నకు 'k' అనేది శూన్యము. అనగా $p(k) = 0$ అప్పుడు $2k + 5 = 0$ i.e., $k = \dfrac{-5}{2}$ అగును.

అందుచే సాధారణముగా $p(x) = ax+b$ అనే బహుపదికి 'k' ఒక శూన్యం అయితే

$p(k) = ak + b = 0$, i.e., $k = \frac{-b}{a}$ అగును. లేదా $ax + b$ అనే రేఖీయ బహుపది శూన్య విలువ $\frac{-b}{a}$ అగును.

దీని నుండి మనకు రేఖీయ బహుపది శూన్యవిలువ దాని స్థిరపదంతో సహా చరరాశి గుణకాలతో సంబంధం కల్గి వున్నదని తెలుస్తున్నది.

3.4 బహుపది శూన్యాలకు జ్యామితీయ అర్థాలు

$p(x)$ బహుపది, k ఒక వాస్తవ సంఖ్య అయిన $p(k) = 0$ అయితే 'k' ను బహుపది శూన్యం అంటారని మీరు తెలుసుకున్నారు. ఇప్పుడు రేఖీయ మరియు వర్గబహుపదుల సంబంధిత రేఖా చిత్రాలలో ప్రాతినిధ్య పరుచుట ద్వారా, ఆయా బహుపదుల శూన్యాలకు జ్యామితీయ భావనలను తెలుసుకుందాం.

3.4.1. రేఖీయ బహుపది యొక్క రేఖా చిత్రము

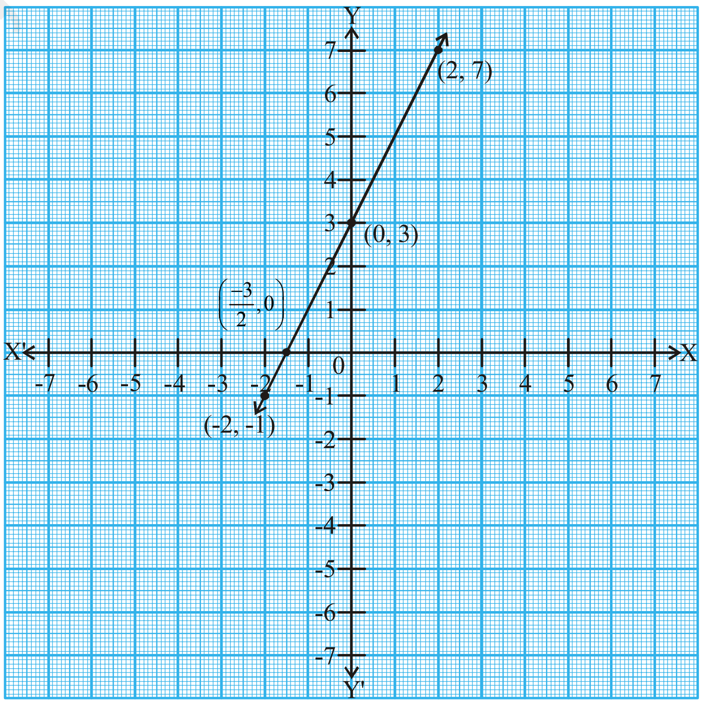
$ax + b$, $a \neq 0$ అనే రేఖీయ బహుపదిని పరిశీలించండి. $y = ax + b$ అనే సమీకరణపు రేఖా చిత్రము ఒక సరళరేఖ అని మీరు 9 వ తరగతిలో తెలుసుకున్నారు. ఉదాహరణకు $y = 2x + 3$ అనే సమీకరణపు రేఖాచిత్రం ఒక సరళరేఖ మరియు ఇది Y-అక్షంను (0, 3) వద్ద ఖండిస్తుంది.

పట్టిక 3.1

x	-2	-1	0	2
$y = 2x + 3$	-1	1	3	7
(x, y)	$(-2, -1)$	$(-1, 1)$	$(0, 3)$	$(2, 7)$

ఈ రేఖ $(-2, -1)$ మరియు $(2, 7)$ బిందువులగుండా పోతున్నది.

$y = 2x + 3$ యొక్క రేఖా చిత్రాన్ని మనం పరిశీలిస్తే అది X-అక్షాన్ని $x = -1$ మరియు $x = -2$ ల మధ్య ఖండిస్తూ $(\frac{-3}{2}, 0)$ గుండా పోతున్నది. అయితే $x = \frac{-3}{2}$ అనేది $2x+3$ అనే బహుపది యొక్క శూన్య విలువ అని మనం గ్రహించవచ్చు. అంటే బహుపది $2x+3$ యొక్క శూన్య విలువ దీని సంబంధిత రేఖాచిత్రం X-అక్షాన్ని ఖండించే బిందువు యొక్క x-నిరూపకము అయినది.



ఇవి చేయండి

(i) $y = 2x + 5$, (ii) $y = 2x - 5$, (iii) $y = 2x$ అను సమీకరణాలకు రేఖాచిత్రాలు గీయండి. ఈ రేఖలు X-అక్షాన్ని ఖండించే బిందువులు కనుగొనండి. వీటి x- నిరూపకాలు సంబంధిత బహుపదుల శూన్యవిలువలేనా?

మనము $ax + b$, $a \neq 0$ అనే రేఖీయ బహుపదిని తీసుకుంటే దాని సంబంధిత $y = ax + b$ యొక్క రేఖాచిత్రము X-అక్షంను ఖచ్చితంగా ఒకే బిందువు $(\frac{-b}{a}, 0)$ వద్ద ఖండిస్తుందని చెబుతాము.

కావున, సాధారణంగా $ax + b$, $a \neq 0$ అనే రేఖీయ బహుపదికి ఒకే ఒక శూన్యవిలువ అంటే దాని రేఖాచిత్రం $y = ax + b$, X- అక్షంను ఖండించే బిందువు యొక్క x - నిరూపకము అని చెప్పవచ్చును. $x = \frac{-b}{a}$ వద్ద ఈ ఖండన బిందువు ఉంటుందని తెలుస్తుంది.

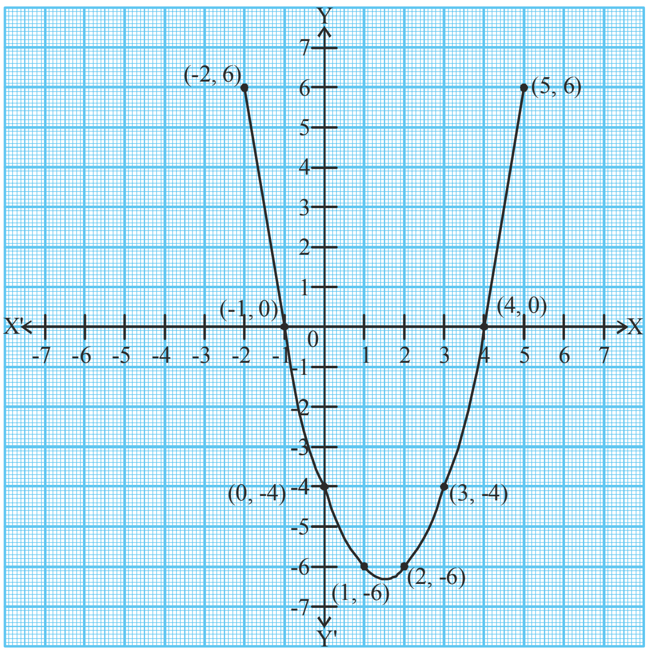
3.4.2. వర్గబహుపది యొక్క రేఖాచిత్రము

వర్గబహుపది యొక్క శూన్యాలకు తగిన జ్యామితీయ భావనలను మనం ఇప్పుడు తెలుసుకుందాం. $x^2 - 3x - 4$ అనే వర్గబహుపదిని పరిశీలిద్దాం. దీని యొక్క రేఖాచిత్రం ఏ విధంగా ఉంటుందో చూద్దాం. దీనికొరకు $y = x^2 - 3x - 4$ అనే సమీకరణంలో x యొక్క విలువలకు తగిన y విలువలు కనుగొందాం. పట్టిక 3.2 ను పరిశీలించండి.

పట్టిక 3.2

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = x^2 - 3x - 4$	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6
(x, y)	$(-2, 6)$	$(-1, 0)$	$(0, -4)$	$(1, -6)$	$(2, -6)$	$(3, -4)$	$(4, 0)$	$(5, 6)$

గ్రాఫ్ కాగితంపై పట్టికలో గల బిందువులను గుర్తించి, క్రమంలో కలిపి చూద్దాం. ఈవర్గ బహుపది యొక్క రేఖాచిత్రం సరళరేఖ అయినదా? కాదా? ఇది $\bigcup$ ఆకారంలో గల వక్రముగా వచ్చింది. ఇది X-అక్షంను రెండు బిందువుల వద్ద ఖండించింది.



అయితే $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ రూపంలో గల ఏవర్గ బహుపది యొక్క సమీకరణ రూపం $y = ax^2 + bx + c$ యొక్క రేఖాచిత్రము అయినా '$\bigcup$' ఆకారంలో పై వైపునకు గాని, '$\bigcap$' ఆకారంలో క్రింది వైపునకు గాని తెరుచుకొని వచ్చు వక్రముగా వుంటుంది. ఈ ఆకారం $a > 0$ లేదా $a < 0$ విలువలపై ఆధారపడి వుంటుంది. (ఈ వక్రాలను మనం **పరావలయాలు** అంటాము)

పట్టిక నుండి, ఈ బహుపది యొక్క శూన్యాలు -1 మరియు 4 అని మనం గమనిస్తాం. అదేవిధంగా వక్రము X-అక్షాన్ని ఖండించిన బిందువుల x- నిరూపకాలు −1 మరియు 4 గా మనం గమనించవచ్చును. అంటే x^2-3x-4 వర్గబహుపది యొక్క శూన్యాలు, ఈ వర్గ బహుపది యొక్క రేఖాచిత్రం X-అక్షాన్ని ఖండించిన బిందువులు x-నిరూపకాలు అయినవి.

బహుపది $P(x)=y=x^2-3x-4$లో $P(-1)=0$ దాని రేఖాచిత్రం X−అక్షాన్ని $(-1, 0)$ వద్ద ఖండించుచున్నది. అదేవిధంగా $P(4)=0$ రేఖాచిత్రం X−అక్షాన్ని $(4, 0)$ వద్ద ఖండించుచున్నది. కావున, బహుపది $P(x)$లో $P(a)=0$ అయిన, $P(x)$ యొక్క రేఖాచిత్రం X−అక్షాన్ని $(a, 0)$ వద్ద ఖండించును.

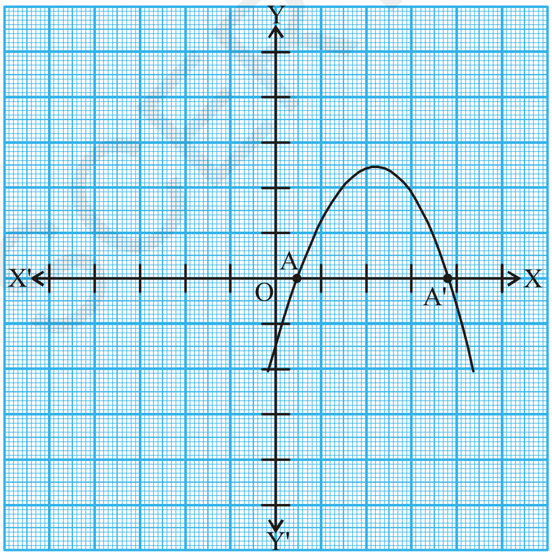
అందుచే, మనము సాధారణంగా $ax^2+bx+c,\ a\neq 0$ అనే వర్గ బహుపది యొక్క శూన్యాలు,ఈ వర్గ బహుపది సమీకరణం $y=ax^2+bx+c$ యొక్క రేఖాచిత్రము X-అక్షాన్ని ఖండించునప్పుడు ఏర్పడు బిందువుల x-నిరూపకాలు అవుతాయని చెప్పవచ్చును.

ప్రయత్నించండి

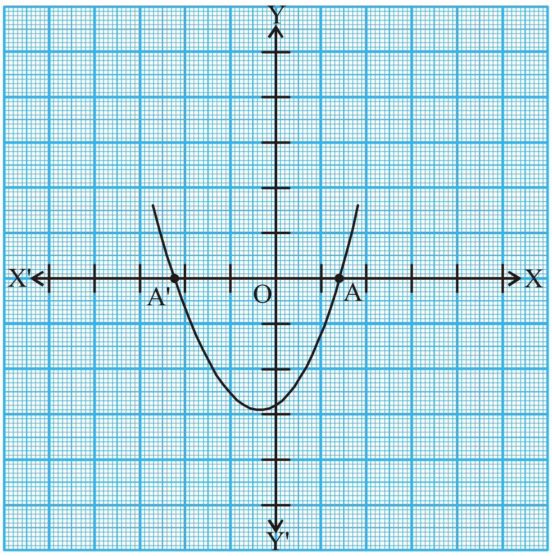
(i) $y=x^2-x-6$ (ii) $y=6-x-x^2$ లకు రేఖాచిత్రాలు గీయండి. ప్రతి సందర్భంలోనూ బహుపది శూన్యాలను కనుగొనండి. మీరు ఏమి గమనించారు?

మనం ముందుగా పరిశీలించిన దానిని బట్టి $y=ax^2+bx+c$ యొక్క రేఖాచిత్ర స్థితి తెలిపే మూడు సందర్భాలుగా వర్గీకరించవచ్చును.

సందర్భం (i) : ఈ సందర్భంలో రేఖాచిత్రము X-అక్షంను A మరియు A′ అను రెండు వేర్వేరు బిందువుల వద్ద ఖండించింది. అందుచే ఈ సందర్భంలో A మరియు A′ బిందువుల x నిరూపకాలను వర్గబహుపది ax^2+bx+c నకు **రెండు శూన్యాలు** అగును. ఈ పరావలయము పైవైపునకు గాని, క్రింది వైపునకు గాని తెరుచుకొని వుండవచ్చును.

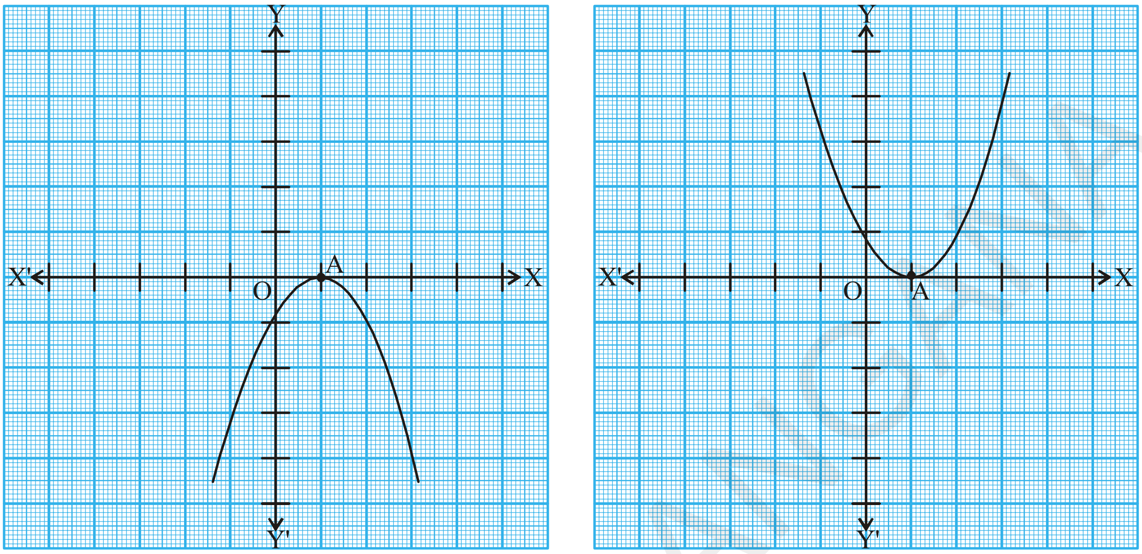


(i)



(ii)

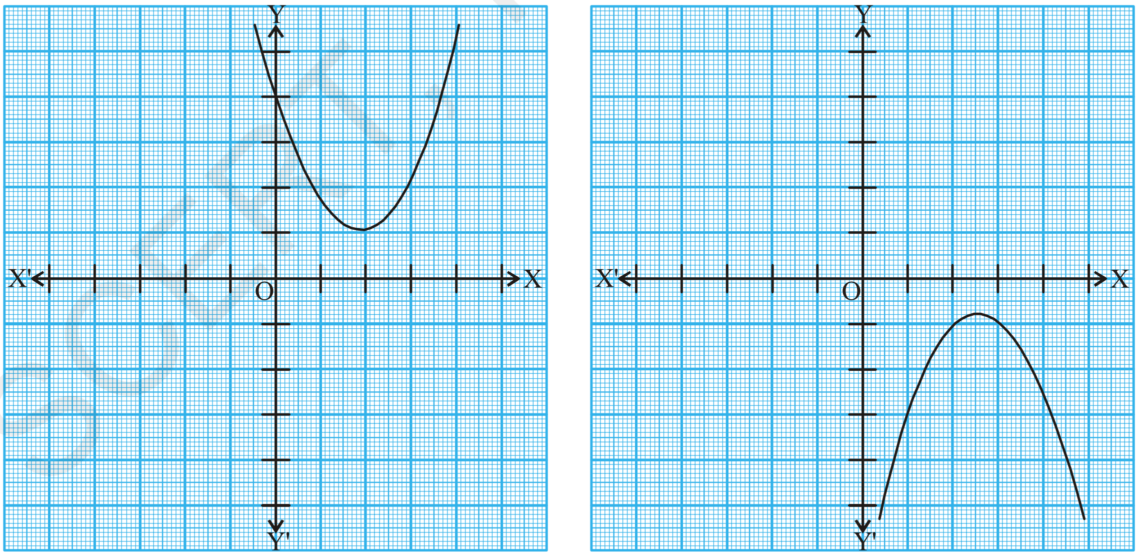
సందర్భం (ii) : ఈ సందర్భములో రేఖాచిత్రము X-అక్షంను ఒకే ఒక బిందువు వద్ద తాకుతుంది. అనగా రెండు బిందువులు ఏకీభవిస్తాయి. అందుచే సందర్భం (i)లో చూపిననట్లు A మరియు A′ బిందువులు రెండునూ ఏకీభవించి ఒకే బిందువు 'A'గా మారతాయి.



(i) (ii)

అందుచే ఈ సందర్భంలో బిందువు 'A' యొక్క x-నిరూపకము వర్గబహుపది $ax^2 + bx + c$ యొక్క ఒకేఒక శూన్యము అగును.

సందర్భము (iii) : ఇచ్చట, రేఖాచిత్రము పూర్తిగా X-అక్షంనకు పూర్తిగా పైన గాని లేదా క్రిందకు గాని వుండి X-అక్షంను ఏ బిందువు వద్దనూ ఖండించలేదు.



(i) (ii)

అందుచే వర్గబహుపది $ax^2 + bx + c$ నకు ఈ సందర్భంలో 'శూన్యము' నిర్వచింపబడదు.

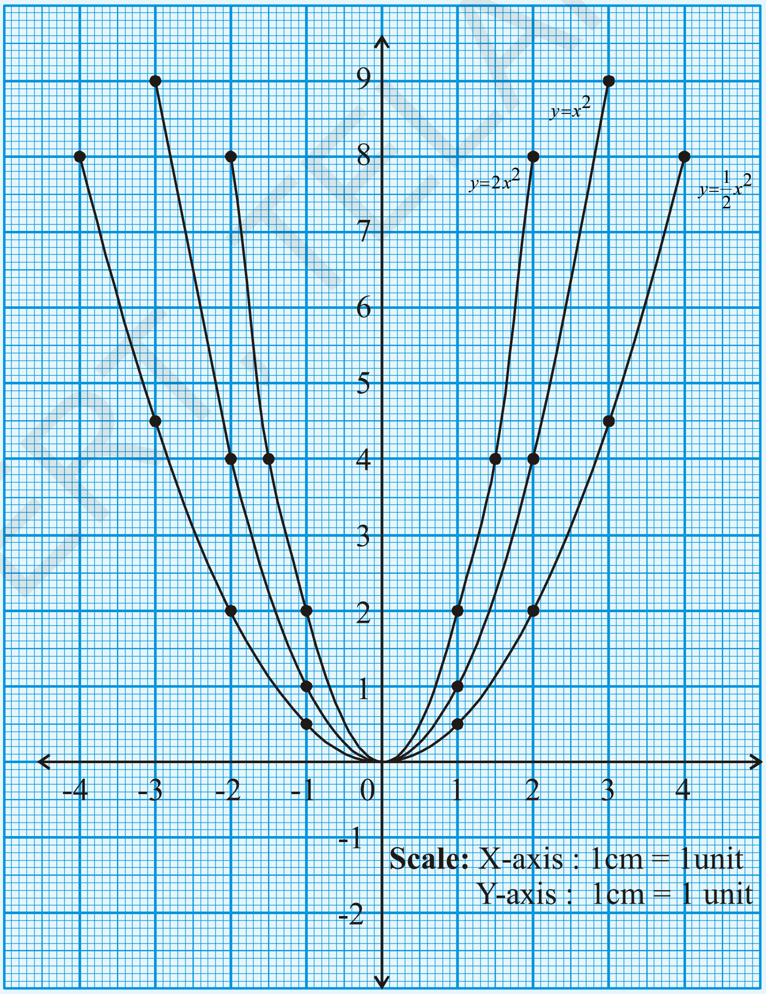
పైన తెల్పిన మూడు సందర్భములను బట్టి వర్గబహుపదిని మనం జ్యామితీయంగా పరిశీలించిన దీనికి శూన్యాలు ఉండవచ్చు లేదా శూన్యాలు లేకపోవచ్చునని తెలుస్తుంది మరియు రెండవ పరిమాణ బహుపదికి గరిష్ఠంగా రెండు శూన్యాలు మాత్రమే వుంటాయని చెప్పవచ్చును.

ప్రయత్నించండి

1. రెండు శూన్యాలు కలిగిన ఏవేని మూడు వర్గ బహుపదులను వ్రాయండి.
2. ఒకే ఒక శూన్యం కలిగిన ఒక వర్గ బహుపదిని వ్రాయండి.
3. ఒక వర్గ బహుపదికి ఒకే ఒక శూన్యము వుంటే దానిని ఏవిధంగా నిరూపిస్తావు?
4. వాస్తవసంఖ్య 'x' కలిగి వుండి శూన్యం లేని వర్గ బహుపదులను ఏవైనా మూడింటిని రాయండి.

ఆలోచించండి - చర్చించండి

కింద ఇవ్వబడిన రేఖాచిత్రాలను పరిశీలించండి. అవి $y=\frac{1}{2}x^2$, $y=x^2$ మరియు $y=2x^2$లను సూచిస్తాయి. మీరు $y=x^2+1$, $y=2x^2+1$ రేఖాచిత్రాలను గీసే ప్రయత్నం చేయండి మరియు వ్యాఖ్యానించండి.

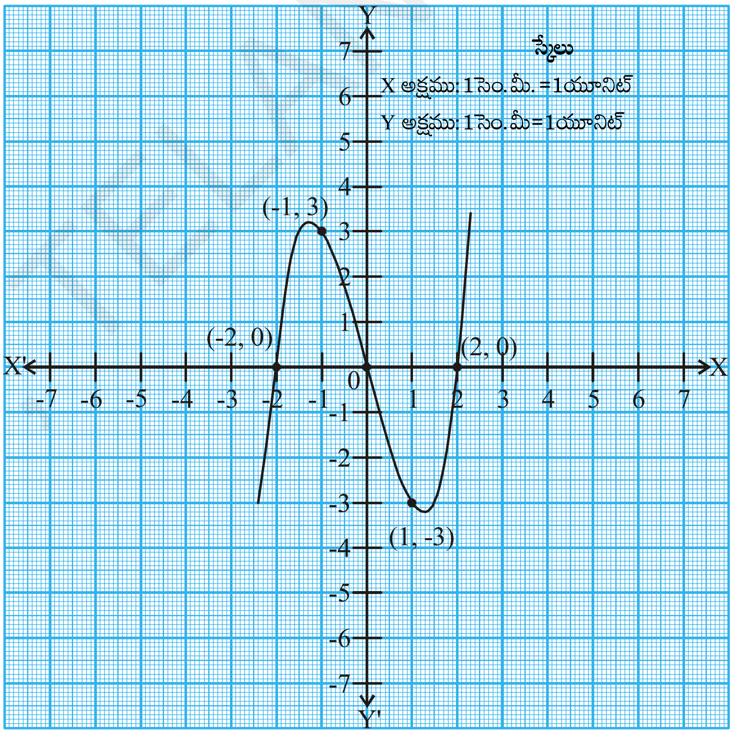


3.4.3 ఘనబహుపదుల శూన్యాలకు జ్యామితీయ భావము

ఘనబహుపదుల శూన్యాలను జ్యామితీయంగా అర్థం చేసుకొనుటలో నీవు ఏమి ఆశిస్తావు? ఇది ఏవిధంగా సాధ్యమో పరిశీలిద్దాము. ఒక ఘనబహుపది $x^3 - 4x$ ను తీసుకుందాము. $y = x^3 - 4x$ యొక్క రేఖాచిత్రము పరిశీలిస్తే దీని అర్థాన్ని గమనించవచ్చు. పట్టిక 3.3 లో ఇచ్చిన విధంగా చరరాశి 'x' కు కొన్ని విలువలను ఇచ్చిదానికి తగిన 'y' విలువలు కనుగొందాము.

పట్టిక 3.3

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^3 - 4x$	0	3	0	-3	0
(x, y)	$(-2, 0)$	$(-1, 3)$	$(0, 0)$	$(1, -3)$	$(2, 0)$



మనం పట్టికను పరిశీలిస్తే ఘన బహుపది $x^3 - 4x$ యొక్క శూన్యాలు $-2, 0$ మరియు 2 అని తెలుస్తున్నది. $y = x^3 - 4x$ యొక్క రేఖాచిత్రంను గీస్తే, అది X-అక్షంను ఖండించే బిందువుల x-నిరూపకాలు -2, 0 మరియు 2 గా కలవు. అందుచే ఈ బహుపదికి మూడు శూన్యాలని చెప్పవచ్చు.

మరిన్ని ఉదాహరణలు తీసుకొని పరిశీలిద్దాము. x^3 మరియు $x^3 - x^2$ అనే ఘన బహుపదులను తీసుకోండి. పట్టిక 3.4 మరియు 3.5లను పరిశీలించండి.

పట్టిక 3.4

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^3$	-8	-1	0	1	8
(x, y)	$(-2, -8)$	$(-1, -1)$	$(0, 0)$	$(1, 1)$	$(2, 8)$